

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Рябець Наталія Анатоліївна

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ «ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У КУРСІ
ГЕОМЕТРІЇ УЧНІВ 7-9 КЛАСІВ»**

**кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
освітньої програми «Математика»
за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика)**

Особистий підпис _____ Наталія РЯБЕЦЬ

Науковий керівник _____ Валерій ХМЕЛЬ,
кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри _____ Юрій КОЗУБ,
доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

Полтава – 2025

АНОТАЦІЯ

Рябець Н. А.

Тема: Методика вивчення «Геометричних перетворень у курсі геометрії учнів 7-9 класів».

Спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)».

Установа: ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2025р.

Магістерська робота містить: 91 с., 67 рис., 32 джерела.

Об'єктом дослідження є форми та методичні прийоми вивчення переміщень в шкільному курсі геометрії.

Предметом дослідження є види переміщень та їх застосування до розв'язування задач.

Мета роботи полягає в розробці методики вивчення теми «Геометричні перетворення в курсі геометрії для учнів 7-9 класів», що включає дослідження особливостей методу геометричних перетворень та його застосування для розв'язування планіметричних задач.

Результати роботи – у роботі вивчені особливості методу геометричних перетворень та розроблена методика розв'язання планіметричних задач за допомогою цього підходу. Розглянуті загальні аспекти методики вирішення планіметричних задач, введено поняття геометричних перетворень площини, визначено їх місце та значення у шкільному курсі планіметрії, а також проаналізовані основні характеристики та принципи цього методу. Окремо досліджено сутність методів центральної та осьової симетрії, повороту, паралельного перенесення та гомотетії, а також їх застосування для розв'язання планіметричних задач, що стосуються обчислень, доведень і побудов.

Ключові слова: ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПЛОЩИНИ, СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ, ОСЬОВА СИМЕТРІЯ, ПОВОРОТНА СИМЕТРІЯ, ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ, ПОДІБНІСТЬ, ГОМОТЕТІЯ.

ANNOTATION

Riabets Nataliia

Theme Use of Methodology for studying "Geometric transformations in the geometry course for students in grades 7-9".

Speciality: 014.04 "Secondary Education (Mathematics)".

Institution: Luhansk Taras Shevchenko National University (LTSNU), 2025 year.

Master's work of: 91 p., 67 im, 32 sources.

Object of research – Forms and methodological techniques for studying displacements in the school geometry course.

Purpose of work – types of displacements and their application to solving problems.

Subject of research - consists in developing a methodology for studying the topic "Geometric transformations in the geometry course for students in grades 7-9", which includes studying the features of the method of geometric transformations and its application for solving planimetric problems.

Results of work. The paper studies the features of the method of geometric transformations and develops a methodology for solving planimetric problems using this approach. The general aspects of the methodology for solving planimetric problems are considered, the concept of geometric transformations of the plane is introduced, their place and significance in the school course of planimetry are determined, and the main characteristics and principles of this method are analyzed. The essence of the methods of central and axial symmetry, rotation, parallel translation and homothety, as well as their application for solving planimetric problems related to calculations, proofs and constructions are separately investigated.

Keywords: GEOMETRIC TRANSFORMATIONS OF THE PLANE, SYMMETRY WITH RESPECT TO A POINT, AXIAL SYMMETRY, ROTATIONAL SYMMETRY, PARALLEL TRANSLATION, SIMILARITY, HOMOTHETY.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ.....	9
1.1. Історичний огляд проблеми дослідження.....	9
1.2 . Поняття про геометричні перетворення площини, їх місце і роль в шкільному курсі планіметрії.....	11
1.2.1. Симетрії відносно точки.....	17
1.2.2. Осьова симетрія.....	20
1.2.3. Поворотна симетрія.....	23
1.2.4. Паралельне перенесення	28
1.2.5. Подібність і гомотетія.....	31
1.3. Характеристика та суть методу геометричних перетворень	34
1.4. Місце геометричних перетворень в програмі, в шкільних підручниках (для різних рівнів вивчення математики)	42
Висновки до розділу.....	49
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВИТКУ ВМІНЬ ШКОЛЯРІВ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ	51
2.1. Застосування геометричних перетворень до розв'язування задач на обчислення	51
2.1.1. Метод осьової та центральної симетрії в задачах на обчислення.....	51
2.1.2. Метод повороту в задачах на обчислення	56
,	56
2.1.3. Метод паралельного перенесення в задачах на обчислення	57
2.1.4. Метод подібності та гомотетії в задачах на обчислення	60
2.2. Застосування методу геометричних перетворень до розв'язування задач на доведення	64
2.2.1. Метод осьової та центральної симетрії в задачах на доведення.....	64
2.2.2. Метод повороту в задачах на доведення	68

2.2.3. Метод паралельного перенесення в задачах на доведення.....	70
2.2.4. Метод подібності та гомотетії в задачах на доведення.....	71
2.3. Геометричні перетворення в задачах на побудову	73
2.3.1. Застосування методу осьової та центральної симетрії	73
2.3.2. Застосування методу повороту	76
2.3.2. Застосування методу паралельного перенесення	79
2.3.4. Застосування методу подібності та гомотетії.....	83
ВИСНОВКИ	87
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	89

ВСТУП

Актуальність теми. Ідея геометричних перетворень є однією з ключових у сучасній математиці та має широке застосування в різних сферах, таких як архітектура, геодезія та інші практичні галузі. Вона тісно пов'язана з поняттями функцій та відображень, які активно використовуються в реальному житті. Завдяки геометричним перетворенням, вдало доводяться складні теореми в різних розділах геометрії. Цей метод також активно використовують кінематографісти для створення вражаючих візуальних ефектів у фільмах, а художники – для створення правильних композицій на картинах. Геометричні перетворення допомагають хімікам вивчати структуру кристалів та інші наукові явища.

Геометричні перетворення є важливою частиною шкільного курсу геометрії, адже цей метод дозволяє ефективно розв'язувати геометричні задачі, спрощуючи доведення тверджень та розв'язок задач на побудову і обчислення. В рамках шкільної програми вивчаються такі види перетворень, як симетрія відносно точки та прямої, поворот, паралельне перенесення і гомотетія. Проте, як учні, так і вчителі часто стикаються з труднощами під час вивчення цієї теми. Це пов'язано з декількома факторами: труднощами в уявленні перетворень на папері чи дошці, а також обмеженим часом, відведеним для цієї теми, порівняно з її значенням для подальшого навчання та розв'язування олімпіадних задач.

Крім того, багато вчителів мають побоювання щодо цієї теми через можливе несприйняття учнями, а самі учні часто не люблять геометричні перетворення через відсутність чітких алгоритмів для вирішення типових задач та невизначеність у практичному застосуванні цього методу.

Аналіз науково-методичних досліджень показує, що в курсі геометрії загальноосвітніх навчальних закладів недостатньо уваги приділяється методам застосування геометричних перетворень для розв'язування планіметричних задач. У зв'язку з цим постає потреба в глибшому вивченні теоретичних основ і практичних аспектів застосування методу геометричних перетворень, а також у розробці методичних підходів до розв'язання планіметричних задач. Одним із

напрямків таких досліджень є підбір та представлення різноманітних задач (на обчислення, доведення, побудову) з урахуванням властивостей геометричних перетворень.

Зацікавленість у методі геометричних перетворень і його застосуванні для розв'язання планіметричних задач свідчить про актуальність цієї проблеми, яка має важливе значення для сучасної освіти та науки.

Об'єктом дослідження є форми та методичні прийоми вивчення переміщень у шкільному курсі геометрії.

Предметом дослідження є види переміщень та їх застосування до розв'язування задач.

Мета роботи полягає в розробці методики вивчення теми «Геометричні перетворення в курсі геометрії для учнів 7-9 класів», що включає дослідження особливостей методу геометричних перетворень та його застосування для розв'язування планіметричних задач.

Мета дослідження реалізується виконанням таких завдань:

- 1) розглянути загальні питання методики розв'язування планіметричних задач;
- 2) вести поняття про геометричні перетворення площини;
- 3) з'ясувати місце та роль геометричних перетворень в шкільному курсі планіметрії;
- 4) встановити та проаналізувати загальні риси та основні положення методу геометричних перетворень;
- 5) з'ясувати суть методів симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії;
- 6) підібрати та представити задачі на обчислення з використанням методів геометричних перетворень;
- 7) підібрати та представити задачі на доведення, які передбачають застосування методу геометричних перетворень;
- 8) підібрати та представити задачі на побудову, які передбачають застосування методу геометричних перетворень;

9) узагальнити й систематизувати результати дослідження.

Методика дослідження. Методика дослідження базується на застосуванні дедуктивного методу наукового пізнання, що передбачає рух від загальних теоретичних положень до конкретних аспектів педагогічної практики: спочатку аналізуються загальні науково-педагогічні принципи теорії методу геометричних перетворень, а потім розглядаються особливості його методики та практичної реалізації.

У роботі використовуються описовий метод, метод критичного аналізу науково-методичних джерел, а також методи структурно-типологічного аналізу, узагальнення та систематизації практичного досвіду.

Наукова новизна дослідження полягає в узагальненні та систематизації науково-методичних знань щодо особливостей застосування методу геометричних перетворень для розв'язування планіметричних задач.

Практичне значення отриманих результатів полягає у їхньому застосуванні в педагогічній практиці: для вчителів математики загальноосвітніх навчальних закладів, методистів, викладачів, учнів та всіх, хто зацікавлений у застосуванні методу геометричних перетворень для розв'язування задач з планіметрії.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО-ТЕОРЕТИЧНІ ТА МЕТОДИЧНІ ОСНОВИ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1.1. Історичний огляд проблеми дослідження

Відомо, що загальна схема побудови курсу елементарної геометрії взята у давньогрецьких вчених; видатну роль тут зіграли “Начала” Евкліда (II ст. до н.е.) [14]. Для свого часу “Начала” були безсумнівно видатним витвором; високі наукові та методичні переваги зробили цю книгу основним підручником, за яким буквально на протязі тисячоліть вивчали геометрію багато поколінь учнів.

У своїй побудові курсу геометрії Евклід безпосередньо виходив із загальних принципів дедуктивної побудови науки, викладених Аристотелем, – і на протязі багатьох століть геометрія вважалася тією наукою, в якій принципи логіки Аристотеля знаходять найбільш повне втілення. Проте наприкінці XIX ст. у зв’язку з розвитком аксіоматичних досліджень було виявлено, що загальна схема дедуктивної побудови науки не була продумана Аристотелем до кінця і що “Начала” Евкліда як кінцеве втілення цієї загальної схеми потребують уточнень. Одночасно з цим математика кінця XIX – початку XX ст. розкрила, що загальна ідея аксіоматики може бути застосована не лише в геометрії, і що в ряді інших математичних дисциплін ця ідея може бути реалізована простіше і методично більш доступно, ніж в геометрії.

Інша сторона евклідових традицій полягає у нехтуванні рухами та геометричними перетвореннями взагалі. Евклід у своєму викладі спеціально прагнув обійтися без використання рухів, застосовуючи їх лише в тих випадках, коли не бачив іншої можливості (наприклад, при доведенні ознак рівності трикутників); логічну завершеність ця лінія знаходить в аксіоматиці Гільберта, з якої повністю виключено поняття руху [11].

Розвиток математики, зокрема, геометрії в XIX ст. довів хибність прагнення виключити з геометрії поняття перетворення; навпаки, стало зрозумілим, що це поняття є одним з самих центральних. Прогрес геометрії в цьому столітті був у значній мірі пов’язаний з широким використанням нових типів перетворень, в першу чергу проєктивних (Понселе, Мьобіус, Штейнер,

Штаудт, Дарбу та ін.) [3, 4]. Велике значення відіграло встановлення Клейном та Пуанкаре зв'язку цих перетворень з неевклідовою геометрією Лобачевського [19]; це сприяло виникненню нового, більш широкого погляду на неевклідову геометрію і навіть на класичну геометрію Евкліда (Келі, Клейн). Певну завершеність нові точки зору знайшли в Ерлангенській програмі Ф.Клейна (1872 р.), яка вказувала на новий, досить загальний погляд на геометрію. При цьому виявилось, що вчення про геометричні перетворення тісно пов'язано також з деякими алгебраїчними концепціями (поняття групи), що відіграють в сучасній математиці основну роль. Значний вплив здійснило теоретико-множинне обґрунтування геометрії і на аксіоматичні дослідження (аксіоматика Шура евклідової геометрії, в якій основну роль відіграє група рухів).

Кінець XIX і початок XX ст. характеризуються подальшим розширенням списку цікавих для геометрії груп перетворень; на перше місце тут слід поставити топологічні перетворення (загальні взаємно однозначні та взаємно неперервні перетворення), подальше вивчення яких сприяло значному зближенню геометрії та аналізу. З іншого боку, в цей же час стала зрозумілою основна роль у всій математиці загального поняття функції або відображення, що досить близьке поняттю геометричного перетворення (значну роль у зближенні цих понять зіграло геометричне трактування Риманом теорії функцій комплексної змінної) [15]. Нарешті, теоретико-групова точка зору на геометрію значно стимулююче вплинула на вивчення геометрій, в основу яких покладено не поняття точки, а будь-яке інше геометричне перетворення (лінійчата геометрія, геометрія кіл та сфер тощо); при цьому виникла необхідність у розгляді нових цікавих перетворень.

Таким чином, у XIX ст. з'ясувалося, що поняття перетворення відіграє в геометрії основну роль; воно може бути покладено в основу означення самого предмету геометрії. Одночасно стало зрозумілим велике загальне математичне значення цього поняття, що тісно пов'язане з поняттям групи та функції, які в значній мірі визначають обличчя сучасної математики, а також велике місце його і в прикладеннях математики. Все це, звичайно, повинно було визначити певну

перебудову викладання геометрії, в якому геометричні перетворення повинні зайняти місце, що відповідає їх науковому значенню; подібна перебудова диктується і чисто методичними міркуваннями (доведення геометричних теорем, пов'язані з перетвореннями фігур, більш доступні учням, що приступають до вивчення геометрії, ніж дедуктивні висновки з аксіом). Висування на перший план геометричних перетворень має ще й ту цінність, що дозволить вказати деякі загальні методи, які дають ключ до розв'язання відразу багатьох геометричних задач на доведення та побудову. При цьому подібні розв'язання в багатьох випадках є більш природними, а тому більш простими, ніж інші способи розв'язання.

1.2 . Поняття про геометричні перетворення площини, їх місце і роль в шкільному курсі планіметрії

Теорія геометричних перетворень виникла у зв'язку з пізнанням законів зображення предметів на площині. Спроби правильно відобразити на плоскому рисунку природні форми предметів здійснювалися задовго до виникнення писемності – люди малювали на стінах печер, скелях, посуді різноманітні рослини, тварин тощо. Тривала практика підказувала митцям, як передати на рисунку зображуваний предмет – так зароджувалося вчення про відповідності й перетворення.

Поняття руху (переміщення) в геометрії сформувалось шляхом абстракції реальних переміщень твердих тіл. Рух, як переміщення фігур і, зокрема, накладання був основним методом доведення у Фалеса (640 – 548р. до н.е.). і відіграв суттєву роль у напрацюваннях Евкліда [14].

Фалес за допомогою перегинів і поворотів рисунка показав справедливості таких фактів, як рівність вертикальних кутів, рівність вписаного кута, що спирається на діаметр кола, прямого кута тощо.

Вперше значну увагу матеріалу геометричних перетворень було приділено відомим вітчизняним математиком і методистом А.Н. Колмогоровим. В його курсі геометрії (1968 – 1980) перетворення займали центральне місце та слугували основою доведення багатьох теорем.

В підручниках Погорєлова А. В. й Атанасяна Л. С. рух та перетворення подібності стали розглядатися скоріш як об'єкт вивчення, ніж універсальний апарат для розв'язування задач.

За чинною програмою та діючими підручниками з математики матеріал геометричних перетворень в загальноосвітньому курсі вивчаються лише на найпростішому, оглядовому рівні і містять мінімум означень і основних фактів. Він представлений у вигляді двох окремих тем: "Подібність трикутників" (8 клас) і "Геометричні перетворення" (9 клас). Тут розглядається подібність фігур в більш загальному, порівняно з восьмим класом, аспекті, як результат перетворень площини [24].

Програма передбачає ознайомлення учнів як з поняттям про геометричні перетворення взагалі, так і з властивостями та застосуванням окремих видів цих перетворень. У шкільному курсі планіметрії розглядаються геометричні перетворення двох видів: *рух* (зберігаються відстані між точками) і *перетворення подібності* (відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів). Як приклади перетворення руху вивчаються: симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, паралельне перенесення, поворот навколо точки. Прикладом перетворення подібності є гомотетія.

Основна мета вивчення геометричних перетворень – ознайомити учнів з різними видами рухів, подібністю і гомотетією, їх властивостями, ввести загальне поняття про рівність і подібність фігур, показати застосування окремих видів перетворень та властивостей площ подібних фігур до розв'язування задач.

Варто зазначити, що тема «Подібні трикутники» багато років традиційно входила до теми «Перетворення подібності» і вивчалася в дев'ятому класі. Такий підхід значно звужував як теоретичне поле, в якому розглядаються трикутники у восьмому класі, так і кількість та тематику змістовних задач. Тому доцільним є виділення окремого класу подібних фігур, а саме, подібних трикутників, яким притаманні певні специфічні властивості, і їх вивчення здійснювати в курсі восьмого класу. Це дозволяє, з одного боку, забезпечити належне підґрунтя для подальшого вивчення теми «Розв'язування прямокутних

трикутників», а з іншого боку, сформулювати початкові поняття про подібність фігур на прикладі трикутників як досить зручної геометричної фігури для дослідження властивостей подібності. Доцільність такого підходу підтверджує багаторічний досвід вивчення теми «Рівні трикутники» автономно від теми «Переміщення (Рух)». Таким чином, вивчення окремих випадків рівності і подібності фігур (на прикладі трикутників) можна трактувати як підґрунтя до впровадження понять рівності і подібності геометричних фігур дедуктивним шляхом, а від цього — до трактування рівності і подібності як результатів геометричних перетворень.

На відмінно від рівня стандарту до поглибленого курсу вивчення математики включено окрему тему «Застосування векторів і геометричних перетворень до розв’язування задач». Значну увагу тут слід приділяти опису перетворень мовою декартових координат, встановленню відповідності між сутністю перетворення та його алгебраїчною інтерпретацією. Цей математичний апарат надає інструментарій для розв’язування широкого класу задач, у тому числі й тих, що розв’язувалися раніше іншими способами [23].

Під час вивчення геометрії учні впевнюються, що не завжди можна дістати відповідь на поставлене запитання внаслідок безпосереднього аналізу заданої фігури або конфігурації. Часто доводиться виконувати деякі перетворення фігури. Це дає змогу зблизити окремі елементи, дістати відрізки або кути, які відповідають даним умови. Такі перетворення фігур не випадкові. Це окремі випадки застосування геометричних перетворень.

Роль навчального матеріалу:

Введення в шкільний курс лінії геометричних перетворень дозволило дати "апаратне", "робоче" тлумачення рівності та подібності фігур.

Якщо в діючих підручниках спочатку вводяться рівні трикутники через рівні елементи або суміщення (накладання), то аналогічне означення рівності (подібності) для довільних фігур ввести важко — потрібні геометричні перетворення.

1) Геометричні перетворення дозволяють ввести в шкільний курс

динаміку, подолати деяку статичність традиційного синтетичного підходу. При цьому з'являється можливість приділити достатньо уваги розвитку певних сторін просторової уяви учнів.

- 2) Геометричні перетворення дають новий ефективний метод розв'язування задач, який дозволяє у певних випадках полегшити доведення теорем і розв'язування задач.
- 3) Геометричні перетворення сприяють реалізації внутрішньо предметних зв'язків з алгеброю (функціональна залежність, перетворення графіків функцій), міжпредметних – з фізикою (механічний поступальний рух тощо), зауважимо, що в фізиці досліджується в основному сам процес руху, в геометрії фіксоване положення фігури, що зазнала руху (початкове, кінцеве, а інколи проміжне).
- 4) Геометричні перетворення додають шкільній математиці естетику, витонченість. Ідея симетрії – орнаменти, сніжинки, архітектурні споруди являються втіленням цієї ідеї, що є одним з найважливіших засобів гуманітаризації навчання математики.

Теорія геометричних перетворень в школі може бути побудована традиційним – синтетичним, а також аналітичним методами. Найбільшого розповсюдження отримав змішаний: аналітико – синтетичний підхід, що використовується в діючих підручниках. Це дозволяє спростити викладання, а також формувати в учнів представлення про можливість використання різних способів завдання геометричних перетворень.

Коротко встановимо основні поняття про геометричні перетворення. Якщо кожній точці однієї фігури F за деяким правилом ставиться у відповідність єдина точка іншої фігури F_1 , така відповідність у геометрії називається *геометричним перетворенням фігури F у фігуру F_1* (рис.1.1).

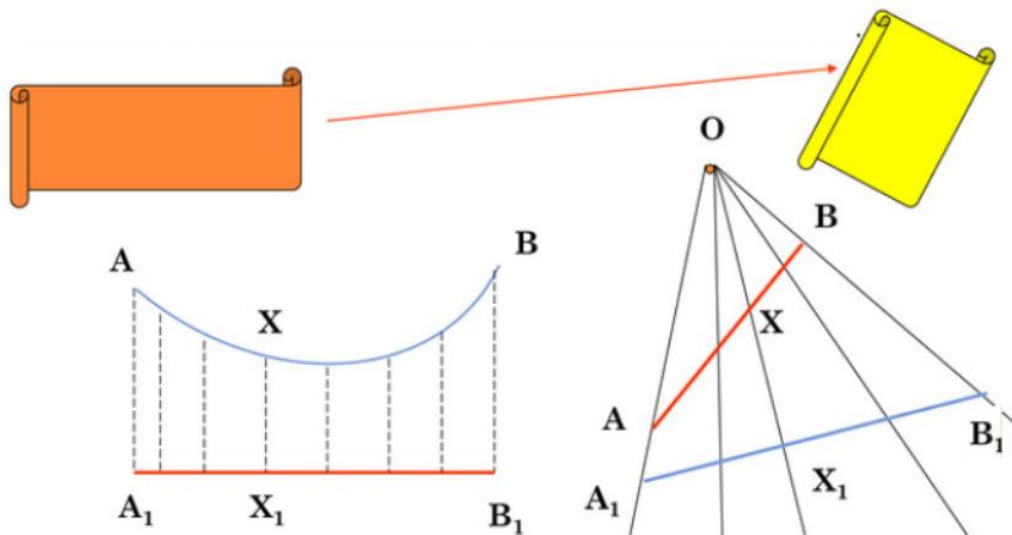


Рис. 1.1. Геометричним перетворенням фігури F у фігуру F_1

Фігура F_1 називається образом фігури F , а фігуру F – прообразом F_1 .

Геометричне перетворення, яке зберігає відстані між відповідними точками, називається *переміщенням* або *рухом*. Переміщення іноді називають ізометрією. Рух перетворює фігуру F у рівну їй фігуру F' (рис.1.2).

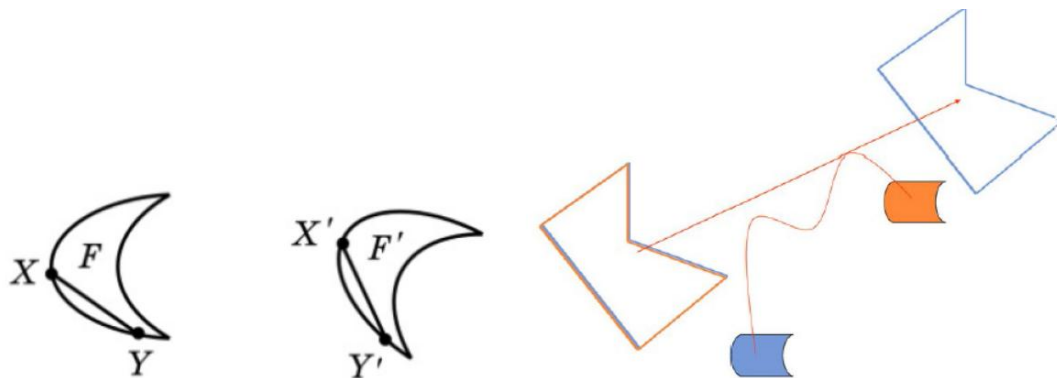


Рис. 1.2. Рух фігур

Властивості переміщення:

1. Внаслідок переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і порядок їх взаємного розміщення зберігається;
2. При переміщенні прямі переходять у прямі, промені – в промені, відрізки у відрізки;
3. Внаслідок переміщення зберігаються кути між променями.

Без доведень вводяться властивості руху:

- образом прямої є пряма;
- образом відрізка є відрізок, рівний даному;
- образом кута є кут, рівний даному;
- образом трикутника є трикутник, рівний даному;
- образом многокутника є многокутник, рівновеликий даному.

Кожна з властивостей розглядається при вивченні окремого виду переміщення.

Після розгляду загального поняття руху переходимо до поняття «рівність фігур». З цим поняттям учні в певній мірі знайомі: до 7-го класу питання про рівність фігур вирішувався накладанням, в 7-му класі дано означення рівних відрізків, кутів, трикутників.

Тепер необхідно дати загальне означення для довільних фігур. Вводимо його абстрактно-дедуктивним способом.

Означення: Дві фігури називаються рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом іншої (або іншими словами, якщо вони суміщаються переміщенням).

Вчитель пояснює учням, що дане означення не суперечить означенням рівних відрізків, кутів і трикутників, яке вивчалось в попередні роки. На відміну від підручника [Погорєлова], в якому поняття рівності фігур розглядалось після вивчення всіх видів рухів, за сучасною програмою вчитель вводить твердження «будь-яке накладання є переміщенням, і навпаки: будь-яке переміщення є накладанням» без обґрунтування, але на свій розсуд може повернутися до цього питання після вивчення рухів.

В шкільному курсі геометрії розглядається такі геометричні перетворення:

- 1) центральна симетрія;
- 2) осьова симетрія;
- 3) поворот;
- 4) паралельне перенесення;
- 5) гомотетія, перетворення подібності.

Класифікацію поняття геометричне перетворення можна представити

наступним чином, за допомогою схеми:



Рис. 1.3. Геометричні перетворення

Розгляд окремих видів геометричних перетворень здійснюється за приблизним наступним планом:

1. Виконується побудова і одночасно проговорюється означення того чи іншого виду перетворення (конструктивне означення).
2. Пропонується завдання на побудову фігур, отриманих шляхом дії руху (перетворення подібності) на дані фігури: геометричне перетворення вводиться для точки, відрізка, трикутника, довільної фігури.
3. Неявно вводиться тотожне перетворення як перетворення, що переводить фігуру саму в себе (в підручнику [Мерзляк] сформульовано означення).
4. Завдання на розпізнавання.
5. Доведення того, що дане перетворення є переміщенням (перетворенням подібності) зазвичай передбачується задачею на побудову із послідовним вимірюванням або обчисленням відстаней.
6. Доведення специфічних властивостей даного виду перетворень.

Охарактеризуємо кожен із різновидів геометричного перетворення площини.

1.2.1. Симетрії відносно точки

Об'єкти, подані на рис. 1.4, можна описати так: вони мають таку точку O

(середину відрізка, центр кола тощо), що для будь-якої точки X кожного об'єкта знайдеться така точка X' , яка лежить на прямій OX на відстані OX' , що дорівнює OX . Точки X і X' називаються симетричними відносно точки O , а точка O — центром симетрії. Об'єкти, які мають цю властивість, називають симетричними відносно точки O , або просто центральносиметричними.

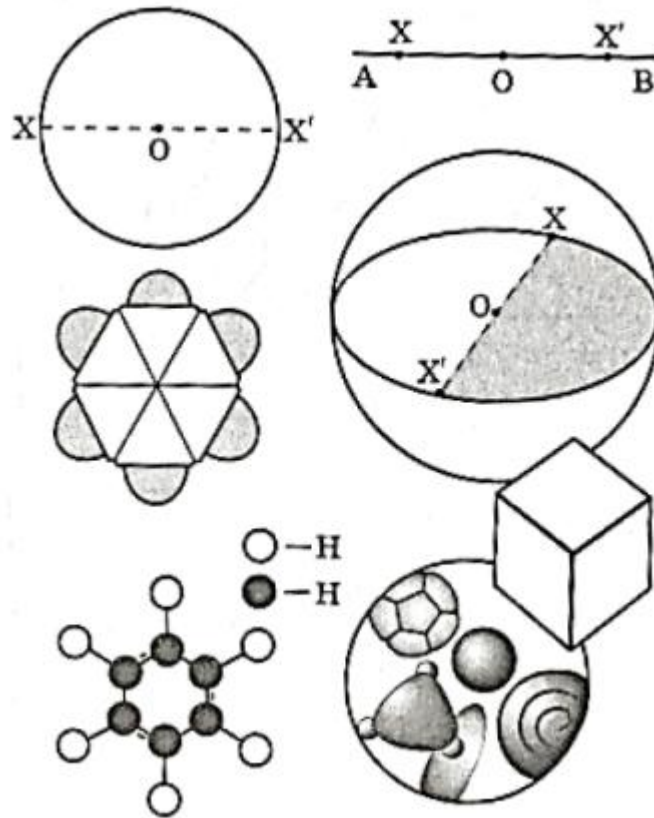


Рис. 1.4. Симетрії відносно точки

Дві точки X і X_1 називаються симетричними відносно точки O , якщо точка O є серединою відрізка XX_1 .

Перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F' , симетричну відносно даної точки O , називається перетворенням симетрії відносно точки O або центральною симетрією (рис.1.5).

Фігури F і F' називаються симетричними відносно точки O .

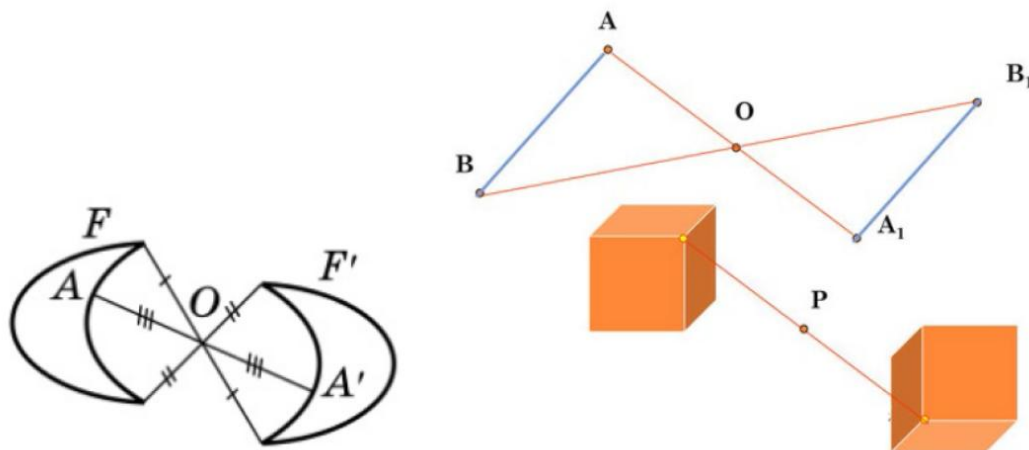


Рис. 1.5. Приклад центральної симетрії

Позначають це перетворення Z_o , причому, якщо точка X' є образом точки X , то це записують так: $Z_o(X) = X'$, або $X' = Z_o(X)$.

Властивості центральної симетрії:

1. Зберігає відстані між точками.
2. Зберігає кути.
3. Переводить прямі у прямі, промені – у промені.

Теорема. Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням. Отже, центральна симетрія Z_o перетворює:

- а) відрізок у рівний і паралельний йому відрізок;
- б) напрямлений відрізок — у рівний і протилежно напрямлений відрізок;
- в) промінь — у паралельний і протилежно напрямлений промінь;
- г) пряму — у паралельну пряму;
- д) кут — у рівний йому кут;
- е) площину — у паралельну площину.

Властивості, які розглядають у курсі геометрії 9 класу. Центральна симетрія перетворює пряму на паралельну їй пряму або в туж саму пряму, відрізок – на відрізок, многокутник – на рівний йому многокутник.

Алгоритм побудови точки, симетричної даній точці X відносно точки O :

1. Проводимо промінь $ХО$.
2. З другого боку від точки O на промені відкласти відрізок $ОХ_1=ХО$.

Для того, щоб побудувати фігуру, симетричну даній відносно точки (центра), потрібно для кожної точки фігури побудувати їй симетричну відносно цього центра.

Приклади центрально-симетричних геометричних фігур: коло, квадрат, ромб, паралелограм, прямокутник, відрізок.

Координатні формули симетрії відносно точки:

$$\begin{cases} x' = -x + 2x_0 \\ y' = -y + 2y_0 \end{cases}$$

Якщо точка A має координати $(x; y)$, то при симетрії відносно початку координат вона перейде в точку A_1 з координатами $(-x; -y)$.

Ці формули переконують, що для найпростішого аналітичного зображення центральної симетрії зручно за початок системи координат брати центр симетрії.

Координатні зображення геометричних перетворень часто значно спрощують розв'язування задач. Вони встановлюють зв'язки між алгеброю і геометрією, математикою і природничими науками.

1.2.2. Осьова симетрія

Нехай l – деяка пряма площини. Перетворення площини, при якому точки прямої l самі собі відповідають, а будь-якій точці A , яка не належить прямій l , відповідає точка A' цієї ж площини, що відрізок AA' перпендикулярний до прямої l і ділиться нею навпіл, називається *симетрією відносно прямої l* , або *осьовою симетрією* (рис.1.6.)

Пряма l називається *віссю симетрії*. Осьову симетрію позначають S_l .

Якщо точка A' є образом точки A в симетрії відносно прямої l , то записують $A' = S_l(A)$.

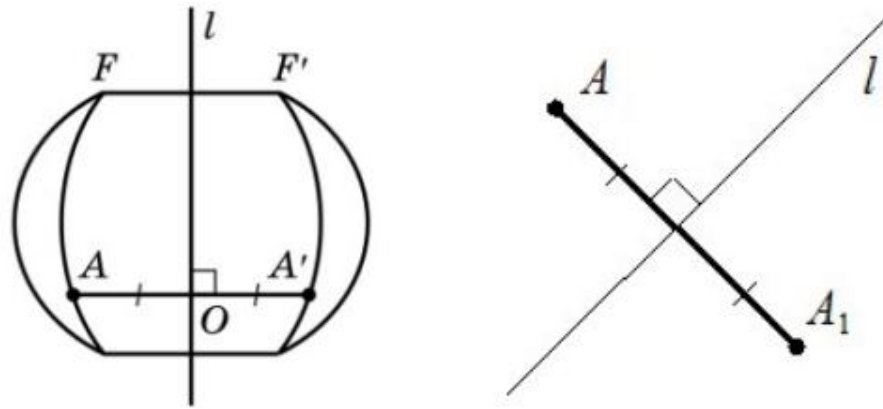


Рис.1.6. Приклад осьової симетрії

Осьова симетрія повністю визначається заданням або осі симетрії, або однієї пари відповідних точок, або двох різних незмінних точок. [10]

Отже, перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X_1 фігури F_1 , симетричну відносно даної прямої l , називається перетворенням симетрії відносно прямої l . Пряма l – вісь симетрії фігур (рис.1.7).

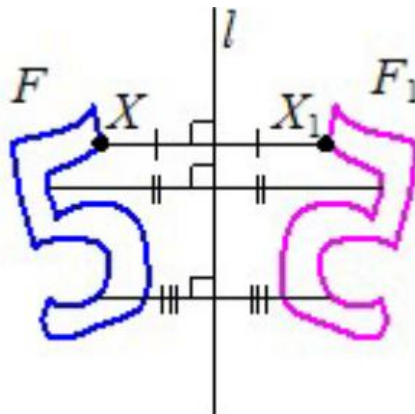


Рис. 1.7. Перетворення симетрії відносно прямої

Так, бісектриса кута є його віссю симетрії, серединний перпендикуляр відрізка є його віссю симетрії, кожна висота рівностороннього трикутника є його віссю симетрії, кожна діагональ ромба (квадрата) є його віссю симетрії, кожен діаметр кола є його віссю симетрії і т.п. [10, 11]

Властивості осьової симетрії:

- 1.Зберігає відстані.
- 2.Зберігає кути.
- 3.Переводить прямі у прямі, промені – у промені.

Теорема. Осьова симетрія є рухом.

Звідси випливає ряд наслідків:

1. Фігури, симетричні відносно прямої, рівні, але мають протилежну орієнтацію (рис.1.7)
2. В осьовій симетрії пряма відображається на пряму, промінь – на промінь.
3. Зберігається упорядкованість точок, паралельність прямих.
4. Симетричні прямі або перетинаються на осі симетрії, або є паралельні їй.
5. Точки осі рівновіддалені від будь-якої пари симетричних точок.
6. Для будь-яких двох прямих, які перетинаються, можна побудувати дві осі симетрії – це бісектриси кутів, утворених прямими.

Алгоритм побудови точки, симетричної даній точці X відносно прямої l :

1. Провести з точки X перпендикуляр XO до прямої l .
 2. На продовженні перпендикуляра відкласти відрізок $OX_1=OX$.
- Точка X_1 - шукана.

Для того, щоб побудувати фігуру, симетричну даній відносно прямої потрібно побудувати для кожної точки даної фігури точку, симетричну відносно цієї прямої.

Приклади симетричних геометричних фігур: квадрат (4 осі симетрії), прямокутника (2 осі симетрії), ромб (2 осі симетрії), коло (безліч осей, адже кожен діаметр є віссю симетрії), рівнобічна трапеція (1 вісь симетрії), правильний трикутник (3 осі симетрії).

Перетворення симетрії відносно осі абсцис виражається такими координатними формулами:

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y \end{cases}$$

Симетрія відносно осі ординат:

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y \end{cases}$$

При таких перетвореннях кожна точка $A(x; y)$ площини перетворюється в точку $A'(x'; y')$.

Перетворення координат відносно прямої $y = x$ (бісектриси I і III координатних кутів): Якщо точка A має координати $(x; y)$, то при симетрії відносно прямої $y = x$ перейде в точку $A_1(x_1; y_1)$, де $x_1 = y$, $y_1 = x$.

Перетворення координат при симетрії відносно осі Ox : Якщо точка A має координати $(x; y)$, то при симетрії відносно осі Ox вона перейде в точку $A_1(x; -y)$.

Перетворення координат при симетрії відносно осі Oy : Якщо точка A має координати $(x; y)$, то при симетрії відносно осі Oy вона перейде в точку $A_1(-x; y)$.

1.2.3. Поворотна симетрія

Серед фігур, зображених на рисунку 1.8, є такі, що не симетричні ні відносно точки, ні відносно прямої. Проте вони складаються із закономірно розташованих рівних складових частин, які можуть суміщатися одна з одною при повороті на деякий кут навколо певної точки O , розташованої в площині фігури. Точку O називають центром повороту.

На рис.1.8 а) подано фігуру, яка перетворюється в себе при повороті на кути, кратні куту $\frac{360^\circ}{3}$, на рис.1.8 б) – при повороті на кут $\frac{360^\circ}{5}$, на рис. 1.8. в) і г) – при повороті на кут $\frac{360^\circ}{6}$, на рис.1.8 д) – при повороті на кут $\frac{360^\circ}{9}$. [10]

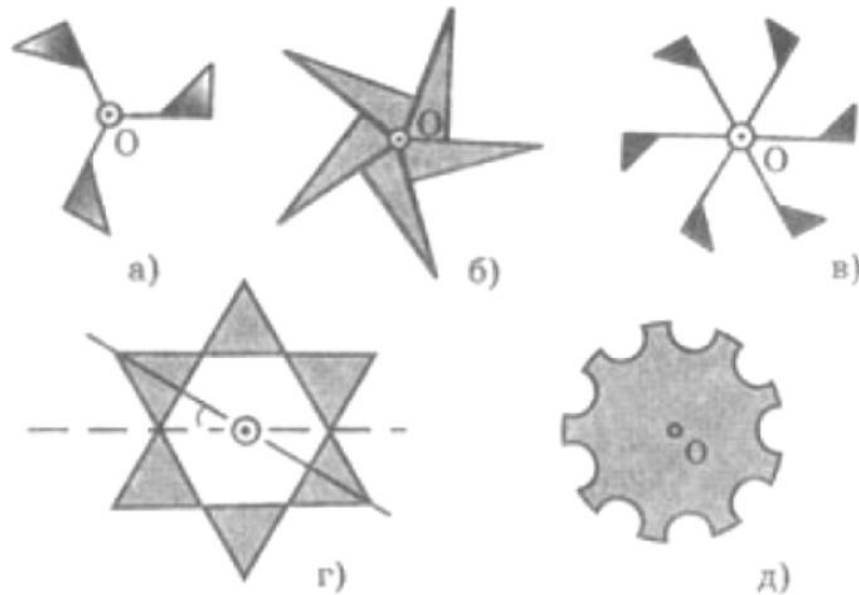


Рис. 1.8. Приклад фігур

Поворотом площини навколо точки O на заданий кут α називається таке перетворення площини, при якому кожній точці X площини, відмінній від точки O , ставиться у відповідність точка X' цієї самої площини, що:

- 1) $OX = OX'$,
- 2) $\angle XOX'$ дорівнює даному куту α і однаково з ним орієнтований.

Точка O називається при цьому *центром повороту*, кут α – *кутом повороту*.

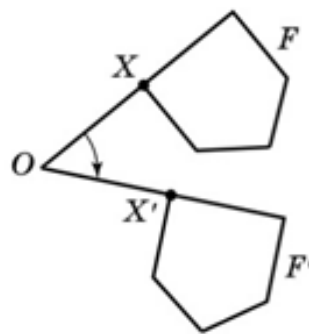


Рис. 1.9. Поворот площини

Поворот позначається символом R_O^α .

Точка X' є образом точки X у повороті навколо точки O на кут α .

Якщо при повороті фігура F відображається сама на себе, то говорять, що ця фігура має поворотну симетрію.

Розглянемо фігуру F , точку O , кут α . Кожній точці X фігури F поставимо у

відповідність точку X_1 , яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F , то їй співставляється вона сама). Усі співставлені точки утворюють фігуру F_1 (рис.1.10).

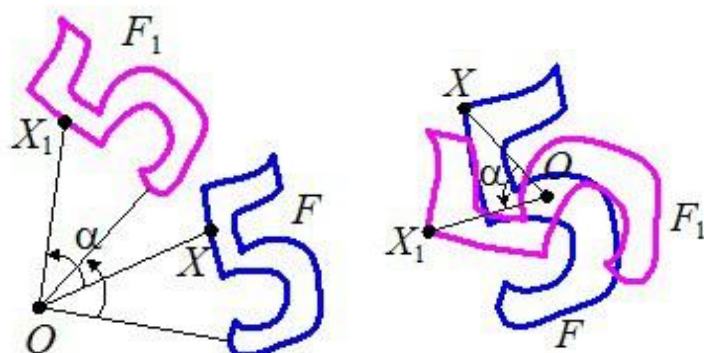


Рис. 1.10. Поворот навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α

Говорять, що фігура F_1 є образом фігури F при перетворенні: повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α .

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут α (рис. 1.11).

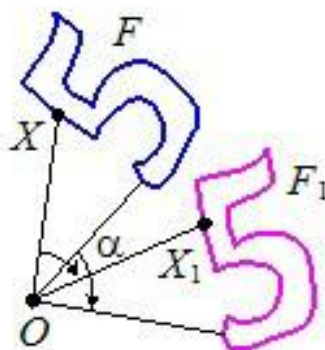


Рис. 1.11. Перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою

На рис. 1.12. зображені відображення:

- 1) точок $A' = R_O^\alpha(A)$, $B' = R_O^\alpha(B)$, $C' = R_O^\alpha(C)$;
- 2) відрізків $A'B' = R_O^\alpha(AB)$, $A'C' = R_O^\alpha(AC)$, $B'C' = R_O^\alpha(BC)$;
- 3) кутів;
- 4) трикутника $\Delta A'B'C' = R_O^\alpha(\Delta ABC)$

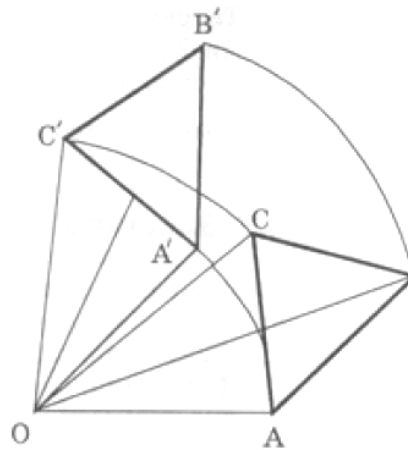


Рис. 1.12. Відображення точок, відрізків, кутів, трикутника

Із наведеного випливає, що поворот навколо точки повністю визначається заданням центра повороту і орієнтованого кута повороту. Крім того поворот може бути заданий центром повороту і парюю відповідних точок або двома парями відповідних точок (парюю відповідних відрізків) [10, 12].

Властивості повороту:

1. Образом точки про повороті площини є точка.
2. На площині існує єдина незмінна точка – центр повороту O , якщо кут повороту відмінний від 0° .
3. Незмінними прямими при повороті на кут 180° є всі прямі, що проходять через центр повороту.

Теорема. Поворот є рухом.

А тому, поворот має всі властивості руху:

4. Поворот переводить прямі у прямі, промені у – промені.
5. Поворот переводить відрізки у рівні їм відрізки.
6. Поворот переводить кути у рівні їм кути.
7. Поворот переводить коло у коло того ж радіуса.

Алгоритм виконання повороту:

1. Задаємо центр O повороту, кут α повороту, напрям повороту (за чи проти годинникової стрілки).
2. Проводимо промінь OX , де X – задана точка, поворот якої виконується.
3. Від променя OX відкладаємо кут XOA , що дорівнює куту α в заданому напрямі.

4. Проводимо коло з центром в точці O радіуса OX . На перетині цього кола і променя OA отримуємо точку, таку, що $OX = OX_1$.

Якщо на площині задана фігура F , то її поворот виконують виконавши поворот кожної її точки. Тоді фігура F перейде у фігуру F_1 .

Поворот на 180° і -180° є центральною симетрією (рис. 1.13).

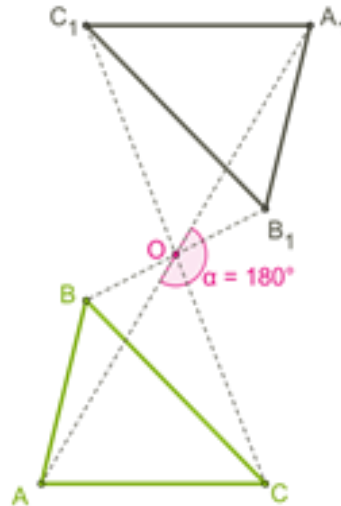


Рис. 1.13. Центральна симетрія

Якщо фігура F внаслідок повороту навколо деякої точки O на кут $\frac{360^\circ}{n}$ (n – натуральне число) переходить сама в себе, то фігура F має симетрію обертання n -го порядку [10].

Фігури, що мають симетрію n -го порядку (рис. 1.14):

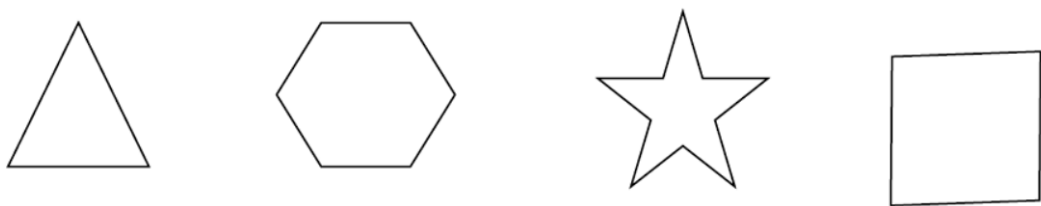


Рис. 1.14. Фігури з симетрією n -го порядку

Формули, що виражають координати точки-образу через координати точки її прообразу при повороті площини у випадку, коли система координат і кут повороту однаково орієнтовані, мають вигляд

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha; \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Коли протилежно орієнтовані, формули повороту набувають вигляду:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ y' = x \sin \alpha - y \cos \alpha. \end{cases}$$

1.2.4. Паралельне перенесення

З рівномірними повтореннями фігур, ліній, об'єктів ми стикаємося в природі, техніці, мистецтві. (рис. 1.15). Такі рівномірні повторення називають паралельними перенесеннями [12].

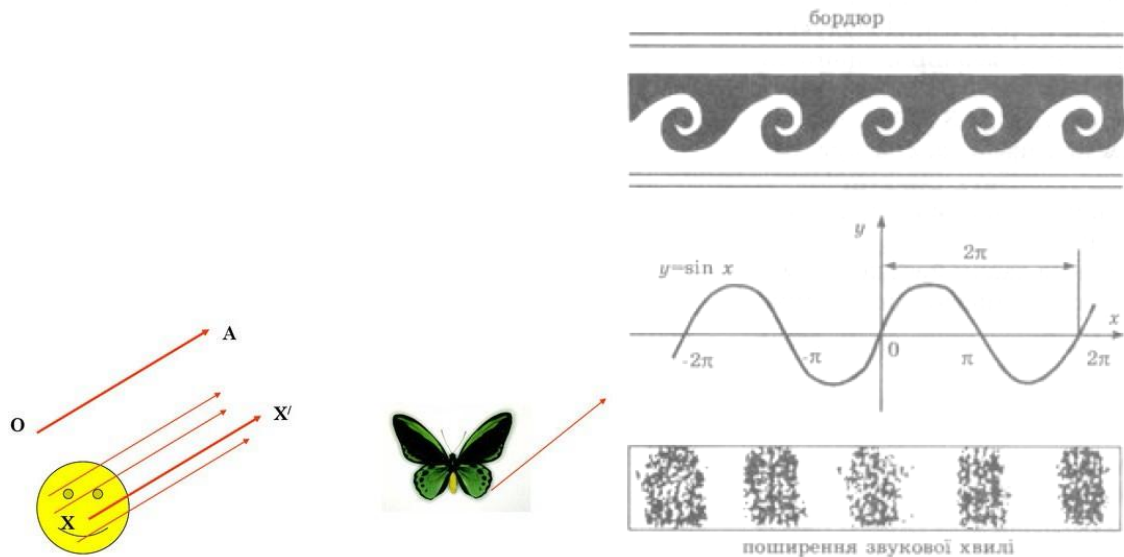


Рис. 1.15. Паралельне перенесення

Перетворення площини, при якому кожна точка M площини відображається на таку точку M' цієї ж площини, що $\overrightarrow{MM_1} = \vec{a}$, називають *паралельним перенесенням* (рис. 1.16). Позначають $T_{\vec{a}}$.

Паралельне перенесення ще називають трансляцією.

Точка M' називається образом точки M при паралельному перенесенні.

Символічно записують $M' = T_{\vec{a}}(M)$ або $M' = \vec{a}(M)$ (рис. 1.16).

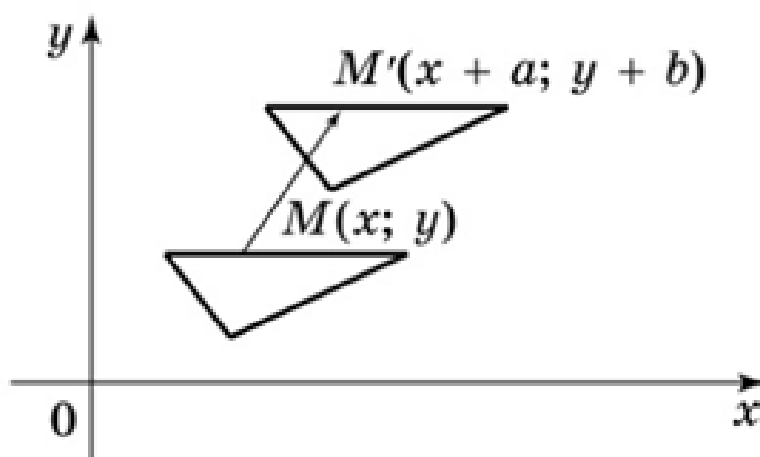


Рис. 1.16. Паралельне перенесення

Паралельним перенесенням фігури називається перенесення всіх точок простору на одну відстань в одному напрямі.

Паралельне перенесення визначає вектор переміщення, за яким відбувається перенесення.

Щоб здійснити паралельне перенесення, потрібно знати напрям і відстань, що означає задати вектор (рис. 1.17). Початкова фігура та фігура, отримана після паралельного перенесення, рівні.

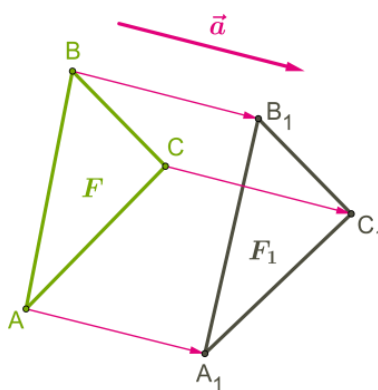


Рис. 1.17. Паралельне перенесення що визначає вектор переміщення

Аби при паралельному перенесенні побудувати зображення многокутника, достатньо побудувати зображення вершин цього многокутника.

Паралельне перенесення в координатах задається формулами

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Ці формули виражають координати x' , y' точки фігури F' образу, у яку переходить точка $(x; y)$ фігури F прообразу при паралельному перенесенні на

вектор з координатами $(a; b)$.

Властивості паралельного перенесення:

1) Теорема. Паралельне перенесення є рухом.

2) При паралельному перенесенні точки переміщуються вздовж паралельних прямих (або однієї прямої) на ту саму відстань.

3) Пряма переходить у паралельну пряму (або в себе); промінь переходить у співнаправлений промінь. Два промені називаються співнаправленими, якщо дані промені паралельні й лежать по один бік від прямої, що проходить через їх початки, або промені лежать на одній прямій і один із них є частиною другого. На рис. 1.18 промені OA і BC , OA і MA , BC і MA — співнаправлені.

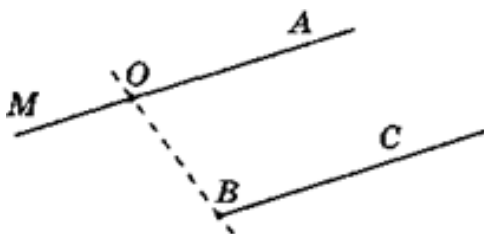


Рис. 1.18. Співнаправлені промені

4) Якби не були точки A і A' існує єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A' .

5) Так як паралельне перенесення є рухом, то образом фігури F у паралельному перенесенні є фігура F' , рівна фігурі F .

Таким чином, при паралельному перенесенні кожен відрізок відображається на паралельний і рівний йому відрізок, трикутник — на рівний йому трикутник, коло — на рівне йому коло, кут — на рівний йому кут і т.д.

Корисними при розв'язуванні задач також є властивості:

1. На площині при паралельному перенесенні немає незмінних точок.
2. Незмінними у паралельному перенесенні є ті прямі, які паралельні до вектору переміщення.
3. При будь-якому паралельному перенесенні якщо точка C лежить між точками A і B , то точка образ C' точки C лежить між образами A' і B' точок A і B [10, 12].

Висновки:

1. Композиція (послідовне виконання) двох осьових симетрій, осі яких паралельні, є паралельне перенесення.

2. Композиція двох центральних симетрій з різними центрами симетрії є паралельним перенесенням.

3. Композиція двох поворотів навколо різних центрів є поворот або паралельне перенесення.

1.2.5. Подібність і гомотетія

Перетворення фігури F на фігуру F_1 називається перетворенням подібності, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в ту саму кількість разів (рис. 1.19).

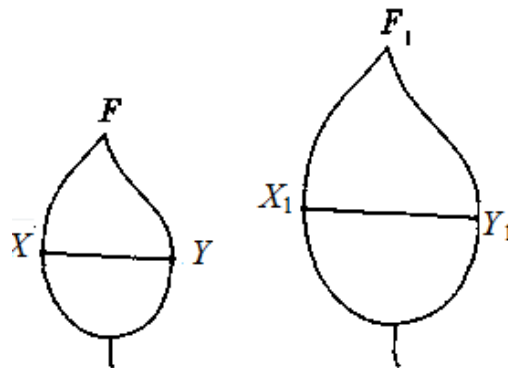


Рис. 1.19. Перетворення подібності

Або іншими словами: якщо довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X_1 і Y_1 фігури F_1 , то $X_1Y_1 = k \cdot XY$, де k — те саме число для будь-яких точок X і Y . Число k називається коефіцієнтом подібності.

Властивості перетворення подібності

1) При перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування.

2) Перетворення подібності переводять прямі у прямі; промені — у промені; відрізки — у відрізки.

3) При перетворенні подібності кут переходить у рівний йому кут.

Фігура F_1 називається *подібною до фігури F* ($F_1 \sim F$), якщо існує відображення фігури F на фігуру F_1 , при якому для будь-яких двох точок A і B фігури F та їх образів A_1 і B_1 фігури F_1 відношення відстаней AB і A_1B_1 є величиною сталою.

Число $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ називають *коефіцієнтом подібності*. Таким чином, фігури

називаються подібними, якщо вони переходять одна в одну при перетворенні подібності.

- 4) Кожна фігура подібна сама собі з коефіцієнтом подібності $k = 1$.
- 5) Якщо фігура F_1 подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k , то фігура F подібна F_1 з коефіцієнтом подібності $1/k$.
- 6) Якщо фігура F_1 подібна фігурі F з коефіцієнтом подібності k_1 , а фігура F_2 подібна F_1 з коефіцієнтом подібності k_2 , то фігура F_2 подібна F з коефіцієнтом подібності $k_1 k_2$ [10, 13].

Тому, кожен рух площини можна розглядати як перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$. Рух є окремим випадком перетворення подібності.

Нехай F — дана фігура і O — фіксована точка (рис. 1.20).

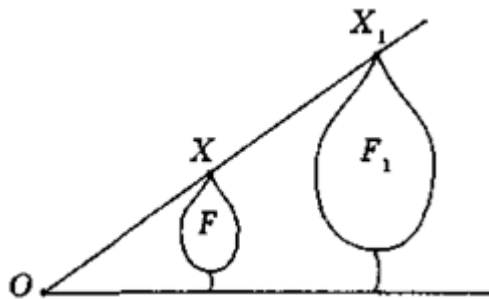


Рис. 1.20. Гомотетія

Через довільну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX_1 , який дорівнює $k \cdot OX$, де k — додатне число. Перетворення фігури F , при якому кожна її точка X переходить у точку X_1 і $OX_1 = k \cdot OX$, називається *гомотетією* відносно точки O ; число k — коефіцієнтом гомотетії; фігури F і F_1 — гомотетичними.

На рис. 1.21 показано гомотетію трикутників з центром в точці O . Якщо $k > 0$, то отримаємо випадок зображений на рис. 1.21 а), коли фігури розміщені по один бік від центра гомотетії; і якщо $k < 0$, то — фігури симетричні відносно центра гомотетії (рис. 1.21 б)).

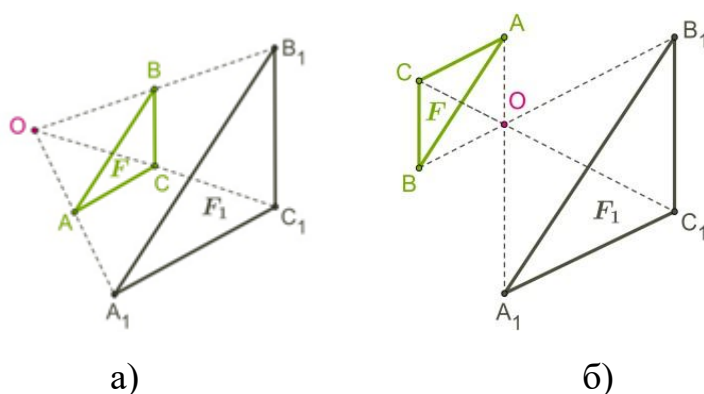


Рис. 1.21. Гомотетія трикутників з центром в точці O: а) $k > 0$; б) $k < 0$

Властивості гомотетії

1. Гомотетія з коефіцієнтом k є перетворенням подібності з коефіцієнтом k
2. При гомотетії пряма переходить у паралельну їй пряму або сама в себе; відрізок — у паралельний йому відрізок; кут — у рівний йому кут.
3. На координатній площині гомотетія точок $A(x; y)$ і $B(x_1; y_1)$ задається формулами:
$$\begin{cases} x_1 = kx, \\ y_1 = ky. \end{cases}$$
4. Образом будь-якої точки в гомотетії з центром O і коефіцієнтом k є точка і при тому єдина.
5. Незмінною точкою площини в гомотетії є лише центр гомотетії, а незмінними прямими — всі прямі, що проходять через центр гомотетії.
6. Гомотетія з центром O і коефіцієнтом -1 є центральною симетрією з центром в точці O.
7. Промінь, що виходить з центра гомотетії, переходить сам у себе, якщо $k > 0$ і в симетричний відносно центра гомотетії якщо $k < 0$.
8. Кожна пряма, що не проходить через центр гомотетії, переходить у паралельну їй пряму.
9. Гомотетія з коефіцієнтом 1 є тотожним перетворенням площини [10, 13].

1.3. Характеристика та суть методу геометричних перетворень

Перетворення площини – рух і подібність – у багатьох випадках дозволяють економно і витончено розв'язувати геометричні задачі. Однак оволодіти методом геометричних перетворень нелегко: не будь-яка задача може бути розв'язана цим методом і потрібен певний досвід, щоб вибрати підходящий вид перетворення.

В залежності від того, яке геометричне перетворення ми використовуємо (паралельне перенесення, осьову симетрію, симетрію відносно точки, поворот чи гомотетію) метод відповідно й називається:

1. методом "паралельного перенесення",
2. методом «центральної симетрії»,
3. методом "осьової симетрії",
4. метод «повороту»
5. метод «гомотетії».

З'ясуємо суть кожного із вище вказаних методів.

Використання властивостей центральної симетрії до розв'язування геометричних задач називають методом центральної симетрії.

Метод симетрії відносно точки застосовується в задачах про центрально-симетричні фігури або про відрізки з серединою в даній точці і кінцями на двох даних прямих. [11]

Хід міркувань зводиться до:

а) знаходження положення прямої, що проводить через центр симетрії двох геометричних фігур;

б) відшукування образу точки на одній з фігур, якщо відомі центр їх симетрії і прообраз цієї точки.

Здебільшого цей метод ефективний тоді, коли серед даних елементів є відрізок, середина якого відома. [10]

Прикладами таких задач є задачі наступного змісту.

Задача. [1; 27]. Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

Доведення. Нехай точка O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. За теоремою про точку перетину діагоналей паралелограма діагоналі AC та BD діляться нею пополам, тому точки A і C , B і D симетричні відносно точки O . Отже, відрізки AB та CD , BC та DA симетричні відносно точки O , яка є центром симетрії паралелограма.

Використання властивостей осьової симетрії до розв'язування задач у геометрії називають *методом осьової симетрії*.

Суть методу полягає в тому, що поряд з даними або шуканими точками (фігурами) розглядають і симетричні їм точки (фігури) відносно певним чином вибраної прямої. Успіх застосування методу осьової симетрії істотно залежить від вдалого вибору осі симетрії.

Оскільки бісектриса кута, діагоналі ромба, квадрата є осями симетрії відповідних фігур, то метод симетрії застосовується до задач, що включають у число даних елементів положення осей симетрії фігури. [10]

Метод симетрії відносно прямої використовується в задачах про геометричні фігури, що мають вісь симетрії, або в тих випадках, коли в задачі дано суму (різницю) лінійних або кутових елементів. При цьому учні повинні вміти знаходити:

- а) образи геометричних фігур при заданій симетрії;
- б) точки на фігурах, симетричних відносно деякої осі. [1] Приклади задач, які можна розв'язати цим методом.

Задача 1. Діагоналі паралелограма $ABCD$ лежать на прямих $y = 0$ та $y = x$. Середина однієї із сторін — точка $M(3;1)$. Знайти координати вершин паралелограма.

Задача 2. Довести, що два трикутники рівні, якщо сторона, прилеглий до неї кут і різниця двох інших сторін одного трикутника дорівнюють відповідним елементам другого.

Розв'язання двох сформульованих вище задач на обчислення та доведення подано в розділі 2.

Отже, застосування методу симетрії дозволяє дану в умові задачі фігуру

(або її елементи) замінюємо фігурою, симетричною даній відносно деякої точки або прямої [11].

Використання властивостей повороту до розв'язування задач у геометрії називають *методом повороту*.

Метод повороту навколо даної точки застосовується в тих задачах, в умовах яких можна виділити рівнобедрений трикутник з відомим кутом між рівними сторонами.

Успіх у його застосуванні залежить від рівня умінь:

- а) будувати образи геометричних фігур (точки, відрізка, променя, прямої, трикутника тощо);
- б) відшукувати центр повороту;
- в) будувати відповідні при даному повороті точки на довільних фігурах, описаних задачними ситуаціями. [1]

Суть методу повороту полягає в тому, що, використовуючи поворот усієї фігури або її частини навколо вдало вибраного центра на певний кут, зближають дані елементи, дістають зручні їх розміщення, що полегшує розв'язання задачі на обчислення, доведення чи побудову.

Зокрема, метод повороту застосовують до розв'язування задач на побудову таких фігур, у яких відомий сталий кут і хоча б два різних відрізки, наприклад, до побудови правильних і рівнобедрених трикутників, квадратів, правильних багатокутників [10, 12].

Приклад задачі. *Задача.* На сторонах АВ і АС трикутника АВС побудовані правильні трикутники АВМ і АСН. Довести, що відстань між точками М і Н дорівнює стороні ВС.

Розв'язання. Розглянемо поворот площини навколо центра А на кут 60° . Оскільки $\angle MAB = 60^\circ$ і $AM = AB$, то при цьому перетворенні точка М перейде в точку В (рис. 1.22). Отже, поворот перетворює відрізок МН у відрізок ВС, звідки за властивістю повороту $MN = BC$.

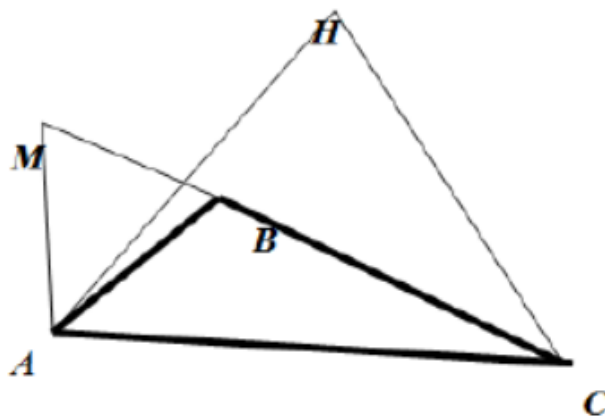


Рис. 1.22. Розв'язання

Інші застосування повороту до розв'язування планіметричних задач подано у розділі 2.

Застосування теорії паралельного перенесення до розв'язування задач на обчислення, доведення та побудову називають *методом паралельного перенесення*.

Властивості паралельного перенесення дають можливість спростити розв'язання ряду задач. Суть цього методу полягає в тому, що разом з даними і шуканими елементами фігури розглядають і їх образи у певним чином вибраному паралельному перенесенні. При цьому перенесення може стосуватися або всієї фігури, або окремих її частин [12].

Метод паралельного перенесення здебільшого використовують для зближення розрізнених частин чотирикутників загального виду, трапецій, трикутників тощо. У всіх випадках вибір частини фігури, яку збираються перенести, і пари відповідних точок (вектори), що характеризують здійснюване паралельне перенесення, спираються на конкретну умову задачі.

При розв'язуванні задач цим методом інколи доводиться застосовувати не одне, а кілька паралельних перенесень [10].

Приклади формулювання задач.

Задача 1. Якщо дві медіани трикутника рівні між собою, то трикутник рівнобедрений. Довести.

Задача 2. Побудувати трапецію за даними її основами та діагоналями.

Розв'язання сформульованих задач та застосування паралельного

перенесення до розв'язування інших планіметричних задач подано у розділі 2.

Отже, метод паралельного перенесення застосовують з метою «зближення» елементів геометричної фігури.

Щоб добре оволодіти умінням використовувати його, треба навчитися будувати образи геометричних фігур при цьому перетворенні, «бачити» його в конкретних задачних ситуаціях.

За навчальними підручниками і посібниками означення і властивості паралельного перенесення можна ввести в використанням декартових координат. Це істотно позначається на характеристиці типів відповідних задач, виділених у ньому. За змістом їх можна розподілити на групи:

- а) виконання паралельного перенесення в координатах;
- б) використання властивостей паралельного перенесення [1].

Використання властивостей подібності та гомотетії до розв'язування задач у геометрії називають *методом подібності або гомотетії*.

Суть методу подібності (гомотетії). Величини відповідних кутів і відношення відповідних відрізків є інваріантами перетворення подібності. Тому метод подібності зручно використовувати для розв'язування таких задач, в умові яких, серед даних є кути і відношення відрізків. Суть цього методу при розв'язуванні задач на побудову полягає в тому, що спочатку будують допоміжну фігуру, подібну шуканій так, вона задовольняла всі умови задачі, крім однієї, яка характеризує лінійні розміри. Потім допоміжну фігуру відображають у їй подібну (шукану) так, щоб виконувалася відкинута умова. У результаті дістають шукану фігуру [10, 13].

Метод подібності в задачах на побудову ґрунтується на тому, що спочатку будують допоміжну геометричну фігуру, подібну даним, але таку, яка не задовольняє лише одну з вимог задачі. Після цього перетворюють знайдену фігуру у подібну їй так, щоб задовольнити невикористану вимогу.

Цей метод застосовують найчастіше до задач, в яких задано довжину одного з відрізків, а інші дані, що визначають шукану фігуру, або кути, або відношення інших відрізків. Щоб серед даних умовою задачі величин вибрати

ті, за якими можна побудувати допоміжну фігуру, подібну шуканій, учневі треба знати, якими величинами можна задати форму геометричної фігури. Такими величинами є:

- а) для трикутника величини двох кутів, відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення трьох сторін, відношення трьох медіан, відношення трьох висот;
- б) для прямокутника — відношення суміжних сторін, відношення діагоналі і сторони, кут між діагоналями;
- в) для паралелограма — відношення двох сторін і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина кута між ними, відношення діагоналей і величина одного з його кутів;
- г) для ромба — величина його кута, відношення діагоналей [13].

Наприклад. Довести, що медіана трикутника менша пів суми сторін, між якими вона розташована [10].

Розв'язання. Побудуємо точку D , симетричну точці C відносно точки M як показано на рисунку 1.23.

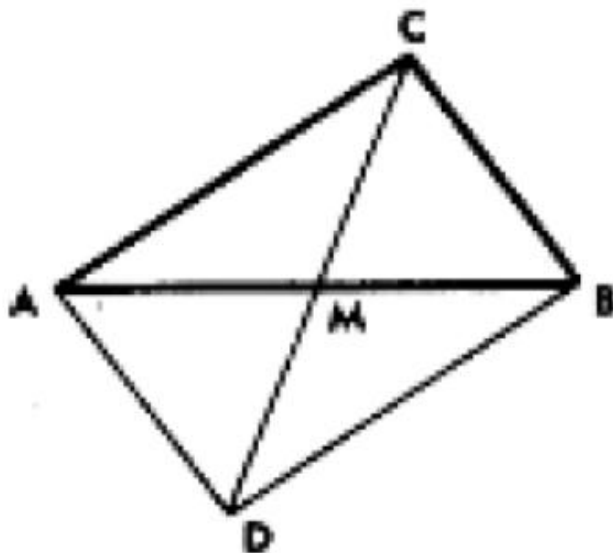


Рис. 1.23. Розв'язання

Так як точка M — середина відрізка AB , то відрізок AD симетричний відрізку BC . Ми отримали трикутник ACD в якому $CD=2CM$, $AD=BC$.

Отже, $2CM < AC + BC$ або $m_c < (a+b)/2$, де $m_c = CM$, $a = BC$, $b = AC$.

Інші приклади розв'язування планіметричних задач методом гомотетії

подані в розділі 2.

Отож, метод гомотетії зручно застосовувати до розв'язування задач на побудову, в яких заданими елементами, що визначають фігуру, є:

1. Один лінійний елемент (сторона, бісектриса, висота, медіана, радіус вписаного чи описаного кола);
2. Сума двох лінійних елементів (сума двох медіан, бісектрис, висот, чи сума висоти і медіани тощо);
3. Відношення лінійних елементів;
4. Кути, які не змінюють величини при подібному перетворенні;
5. Коли потрібно одну фігуру вписати в іншу. У цьому випадку відкидають одну з умов розміщення шуканої вписаної фігури і будують фігуру, подібну до шуканої. Такою умовою часто буває те, що одна з вершин вписаної фігури не належить відповідній стороні даної фігури. Тоді допоміжну фігуру геометричним перетворенням переводять у шукану вписану.

Як бачимо, метод гомотетії застосовують до розв'язування таких задач на побудову, умову яких можна розбити на дві частини, одна з яких визначає форму фігури (кути, відношення відрізків), а інша – її розміри, положення відносно даних ліній і точок.

Допоміжну фігуру краще будувати так, щоб вона була не лише подібною до шуканої, а й подібно з нею розміщена, зокрема, щоб допоміжна і шукана фігури були гомотетичними. При цьому важливо вдало вибрати центр гомотетії. Коефіцієнт гомотетії (подібності) дорівнює відношенню будь-якої пари відповідних відрізків шуканої і допоміжної фігур. Слід пам'ятати властивості відношень двох величин. Наприклад, якщо відрізки a, b, c , фігури F відповідають відрізки a', b', c' фігури F' , то коефіцієнт подібності дорівнює відношенням [10, 13]:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+b}{a'+b'} = \frac{a-b+c}{a'-b'+c'} = \dots$$

Як відомо, навчання учнів розв'язанню геометричних задач із

використанням геометричних перетворень представляють особливі труднощі. Це пов'язано з тим, що розв'язування задач даним методом не можна звести до визначених алгоритмів або вказівок. Розв'язання кожної задачі представляє творчий процес [19, 30].

Розв'язування задач методом геометричних перетворень буде результативним при чіткому розумінні змісту властивостей кожного із перетворень площини. Відповідно, властивості геометричних перетворень використовуються ефективно до розв'язування задач лише тоді, коли учні вміють:

- а) будувати геометричні фігури при конкретних видах перетворень;
- б) визначати вид перетворення за окремими елементами геометричних фігур;
- в) встановлювати (обчисленням, побудовою) положення відповідних точок при певному виді перетворення [1].

Для формування цих умінь корисно скористатися розв'язуванням задач на побудову. Задачі цього виду можна умовно поділити на групи:

- а) побудова відповідних точок при заданому геометричному перетворенні;
- б) побудова фігури, для якої відповідне перетворення треба знайти.

Тому, перш ніж приступити до навчання розв'язувати задачі даними методами, особливу увагу необхідно приділити поетапному формуванню наступних умінь:

- 1) будувати образи фігур при переміщенні і гомотетії;
- 2) знаходити відповідні в перетвореннях точки на даних відповідних у тому ж перетворенні фігурах.
- 3) виділяти елементи, що визначають перетворення: осі симетрії, центр і кут повороту, напрям і відстань паралельного перенесення, коефіцієнт гомотетії;
- 4) будувати відповідні в перетвореннях точки на заданих фігурах [1].

Для виявлення рівня сформованості умінь призначені діагностичні задачі,

які варто запропонувати учням перед зразками розв'язання задач кожним методом.

І тільки переконавшись, що учні вільно володіють вказаними методами, можна приступити до навчання розв'язання задач.

Отже, суть методу геометричних перетворень полягає в розгляді поряд з даними фігурами їхніх образів, отриманих за допомогою певного перетворення.

Використання цих методів для розв'язування задач на обчислення, доведення та побудову наводиться у розділі 2. Основними джерелами для підбору задач, які розглядаємо у 2 є [1, 10, 11, 12, 13, 27].

1.4. Місце геометричних перетворень в програмі, в шкільних підручниках (для різних рівнів вивчення математики)

У сучасних шкільних програмах [34, 47, 48] поняттю геометричного перетворення відводиться досить скромне місце: школярам дають визначення таких перетворень як поворот, паралельне перенесення, симетрія, іноді інверсія, і показують, що ці перетворення можуть бути корисні при вирішенні певних завдань. Тим часом, поняття перетворення є для геометрії ключовим. Інакше кажучи, саме визначення геометрії вимагає його використання.

Курс математики основної школи логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів, розпочату в початкових класах, розширюючи і доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів.

Зміст математичної освіти в основній школі структурується за такими змістовими лініями: числа; вирази; рівняння і нерівності; функції; геометричні фігури; геометричні величини. Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на цьому ступені шкільної освіти, в якому виокремлюються два основні етапи: 5-6 класи і 7-9 класи. Освітні завдання на першому етапі реалізуються у процесі вивчення єдиного курсу математики, на другому – двох курсів: алгебри і геометрії.

Головна лінія курсу геометрії – геометричні фігури та їх властивості. Основними поняттями курсу є: точка, пряма, площина, належати, лежати між.

Перші три поняття – це основні геометричні фігури, а два останніх – основні відношення. Це неозначувані поняття – для них не формулюються означення, але їх зміст розкривається через опис, показ, характеристику. Інші поняття курсу визначаються, а їх властивості встановлюються шляхом доказових міркувань. Учень має усвідомити, що під час доведення теорем можна користуватися означеннями і раніше доведеними теоремами.

У 9 класі розширюються уявлення учнів про аналітичне задання геометричних фігур, зокрема подається рівняння прямої, кола, виводяться формули довжини відрізка, координат середини відрізка, формується поняття про метод координат, який застосовується до доведення теорем та розв’язування задач. До відомих учням скалярних величин долучаються векторні величини. Розглядаються рівні, протилежні, колінеарні вектори.

Поглиблене вивчення математики в 8-9 класах передбачає розширення і поглиблення змісту відповідного курсу математики загальноосвітньої школи, посилення його прикладної спрямованості, формування в учнів стійкого інтересу до предмета, виявлення і розвиток математичних здібностей, підготовку до поглибленого навчання математики в старшій школі. Поглиблене вивчення математики в основній школі є певною мірою орієнтаційним. Важливо тут допомогти учневі усвідомити ступінь свого інтересу до предмета і оцінити можливості оволодіння ним із тим, щоб після закінчення дев’ятого класу зробити свідомий вибір на користь подальшого поглибленого вивчення математики або вивчення її в межах загальноосвітнього курсу.

Крім загальних завдань, в основній школі реалізуються такі специфічні для даного етапу поглибленого навчання математики освітні завдання:

- вивчення геометричних перетворень площини (рухів, подібності) та їх властивостей, а також розвиток функціональних уявлень на геометричному змісті;
- ознайомлення з методами геометричних перетворень, координат і векторів та вироблення умінь застосовувати їх під час розв’язування задач.

У темі «Геометричні перетворення» вивчається рух та його види (паралельне перенесення, симетрії відносно точки і прямої, поворот), гомотетія, перетворення подібності та властивості цих перетворень. Тут розглядається подібність фігур в більш загальному, порівняно з восьмим класом, аспекті, як результат перетворень площини. Значну увагу слід приділяти опису перетворень мовою декартових координат, встановленню відповідності між сутністю перетворення та його алгебраїчною інтерпретацією. Цей математичний апарат надає інструментарій для розв'язування широкого класу задач, у тому числі й тих, що розв'язувалися раніше іншими способами.

Якщо вивчення теми «Геометричні перетворення» в 9 класі розраховано на 6 годин навчального часу. Дана тема включає в себе наступний навчальний матеріал:

- Переміщення (рух) та його властивості.
- Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення.
- Рівність фігур.

То вивчення теми «Геометричні перетворення» в 9 класі (поглиблене вивчення математики) розраховано на 20 годин навчального часу. Дана тема включає в себе такий навчальний матеріал:

- Поняття геометричного перетворення.
- Переміщення (рух) та його властивості.
- Рівність фігур.
- Паралельне перенесення.
- Симетрія відносно точки і прямої.
- Поворот.

Застосування переміщень до розв'язування задач. Гомотетія та її властивості.

- Перетворення подібності та його властивості.
- Подібність фігур.
- Площі подібних фігур.

Застосування перетворень подібності та гомотетії до розв'язування задач. (Інверсія. Застосування інверсії до розв'язування задач).

Проведемо огляд навчально-методичної літератури за темою «Геометричні перетворення». Для цього розглянемо такі навчальні посібники: «Геометрія» підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів (авт. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.) [5], «Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики» підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів (авт. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.) [26], «Геометрія. Початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу»

Тема «Геометричні перетворення» в посібнику «Геометрія» для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів (авт. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г.).

Цій темі присвячений розділ 5, який складається з шести параграфів. У § 21 “Переміщення та його властивості” на прикладі найпростішого стрічкового орнаменту вводиться поняття “геометричне перетворення фігури”, теорема 12 з доведенням: “Якщо точка B лежить між точками A і C , а переміщення відображає їх на точки B_1 , A_1 і C_1 , то B_1 лежить між A_1 і C_1 ” та теорема 13 з доведенням “Переміщення відображає відрізок на рівний йому відрізок”.

У § 22 “Симетрія відносно точки” наводиться теорема 14 з доведенням:

“Симетрія відносно точки - переміщення”. В параграфі дається означення центральній симетрії, приклади центральньо-симетричних фігур.

У § 23 “Симетрія відносно прямої” дається означення симетричним фігурам відносно прямої та теорема 16 з доведенням “Перетворення симетрії відносно прямої є переміщення”

У § 24 “Поворот” дається означення, що називається центром повороту та кутом повороту. Після теореми 17 та її доведення дається означення: “Симетрія відносно точки є поворот на 180° навколо цієї точки”.

У § 25 “Паралельне перенесення”. Його вводять за допомогою малюнка. Дається теорема 18 з доведенням: “Паралельне перенесення - переміщення”.

У § 26 “Перетворення подібності” вводяться означення, що називають перетворенням подібності та коефіцієнтом подібності. Теорема 19 з доведенням: “Перетворення подібності переводить три точки, що лежать на одній прямій, у точки, що лежать на одній прямій, і зберігає порядок взаємного розміщення цих точок”. Вводяться означення подібних фігур та властивості подібності. Теорема 20 з доведенням: “Відношення периметрів подібних багатокутників дорівнює коефіцієнту подібності”. Теорема 21 з доведенням: “Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності”

Тема «Перетворення фігур» в навчальному посібнику «Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики» підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів (авт. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.).

Цій темі присвячений параграф 6, який складається з 6 пунктів.

В цьому параграфі ознайомлюють з такими видами перетворень: паралельне перенесення, центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, подібність.

Пункт 19. Перетворення (відображення) фігур. На прикладі рисунків дається означення образу і прообразу фігури, та яке перетворення називається оборотним, оберненим, тотожним, взаємно оберненим.

Пункт 20. Рух. Паралельне перенесення. Означення: “Перетворення фігури F , яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F . В цьому пункті доводяться шість теорем про рух, вивчається два наслідки з теорем. Наслідок з теореми: “Якщо фігура F_1 - образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F = F_1$. В кінці пункту автор дає алгоритм побудови.

Пункт 21. Осьова симетрія. Починається пункт з означення, які точки називаються симетричними відносно прямої l . На прикладі рисунка дається означення осьової симетрії відносно прямої l та як називається пряма l . Властивість осьової симетрії - теорема 21.1 з доведенням. Осьова симетрія є рух. Два наслідки з теореми:

Наслідок 1. Якщо, $S_1(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Наслідок 2. Осьова симетрія є оборотним перетворенням. Якщо $S_1(F) = F_1$ то, $S_1(F_1) = F$, тобто $S_1 \circ S_1(F) = F$.

Означення. Фігуру називають симетричною відносно прямої l , якщо $S_1(F) = F$. Після означення наводяться приклади фігур, які мають вісь симетрії.

Рівносторонній трикутник має три осі симетрії, квадрат має чотири осі симетрії. Теорема 21.2. Якщо фігура має рівно дві осі симетрії, то ці осі перпендикулярні. Теорема 21.3. Якщо многокутник має дві або більше осей симетрії, то вони перетинаються в одній точці. Ці теореми пропонує автор довести на математичному гуртку. Теорема 21.4. Композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням. Цю теорему автор пропонує самостійно довести по складеному плану. В кінці пункту наведені приклади розв'язання задач та наведено приклад, який трикутник називається ортоцентричним.

Пункт 22. Центральна симетрія. Пункт починається з означення: “Точки A і A_1 називаються симетричними відносно точки O , якщо точка O є серединою відрізка AA_1 . Точку O вважають симетричною самій собі. На прикладі рисунків показують, що називають центральною симетрією відносно точки, центром симетрії. Властивість центральної симетрії - теорема 22.1. Центральна симетрія є рухом. Після доведення теореми дається два наслідки.

Наслідок 1. Якщо $S_O(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Наслідок 2. Центральна симетрія є оборотним перетворенням. Якщо $S_O(F) = F_1$, то $S_O(F_1) = F$, тобто $S_O \circ S_O(F) = F$.

Означення. Фігуру називають симетричною відносно точки O , якщо $S_O(F) = F$. Після означення автор наводить приклади фігур, які мають центр симетрії. В кінці пункту автор наводить приклади розв'язання задач: дві на побудову, дві - довести.

Пункт 23. Поворот.

Пояснення починається з рисунка, на якому зображені точки, що утворюють рівні відрізки та рівні кути. Автор показує, яку точку називають центром повороту, а який кут називають кутом повороту. Далі розглядається

фігура F , точка O , кут α . та точки, які належать фігурі F і точки, які ставлять у відповідність точкам фігури F , які є образом даним точкам. Внаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 . Автор називає таке перетворення фігури F поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α та позначає R_O^α . Пишуть: $R_O^\alpha(F) = F_1$. Точку O називає центром повороту. Теорему 23.1.(властивість повороту): “ Поворот є рухом.” автор пропонує довести самостійно. Теорема 23.2 Композицією двох осьових симетрій з непараельними осями є поворот навколо точки перетину осей. Довести теорему пропонують самостійно, по складеному плану.

Теорему 23.3. Будь-який рух фігури є композицією не більше, ніж трьох осьових симетрій. Довести теорему пропонується на математичному гуртку.

Пункт 24. Гомотетія. Подібність фігур. Пояснення теми починається з розгляду фіксованої точки O та довільної точки X .

Теорема 24.1. При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F , а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k , то $A_1B_1 = |k| AB$.

Наслідок. Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом гомотетії k , то $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

Теорема 24.2. При гомотетії фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.

Скориставшись теоремою 24.1 та ідеєю доведення теореми 20.1, автор пропонує довести цю теорему самостійно.

Наслідок. При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.

Означення. Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху..

З попередніх теорем і означень, автор робить висновок: при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів

Теорема 24.3. Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

В кінці пункту дається оповідання: “Інверсія”.

У цьому оповіданні ми розглянемо перетворення фігур, яке називають інверсією (від латин. *inversio* — перегортання, обернення) та властивості інверсії.

Властивість 1. Образами точок, які лежать усередині кола інверсії (не включаючи центр кола), є точки, які лежать поза колом, і навпаки, образами точок, які лежать поза колом інверсії,

є точки, які лежать усередині кола.

Властивість 2. Якщо X — довільна точка кола інверсії, то тобто всі точки кола інверсії є нерухомими точками цього перетворення.

Властивість 3. Інверсія є оборотним перетворенням. Перетворенням, оберненим до інверсії, є ця сама інверсія.

Висновки до розділу

Геометричні перетворення площини спрощують розв’язування багатьох планіметричних задач та виступають потужним інструментом їх розв’язання. Основна ідея цього методу полягає в тому, що фігура, яка розглядається в умові задачі, перетворюється в «нову» фігуру, яку дістали з даної за допомогою певного геометричного перетворення; з’ясовуємо властивості « нової » фігури і розв’язавши задачу для перетвореної фігури, потім оберненим перетворенням повертаємося до початкової фігури. Так знаходимо шлях розв’язування задачі.

У деяких задачах перетворення застосовуємо не до всієї фігури, а лише до деякої її частини.

Залежно від того, яке перетворення застосовується, розрізняють різновидності методу геометричних перетворень: метод симетрії, метод

повороту, метод паралельного перенесення та метод подібності.

Метод симетрії досить часто застосовують у процесі розв'язування завдань на знаходження мінімальних значень певних величин.

Метод повороту корисно застосовувати тоді, коли в умові задачі дано трикутник з відомим кутом між рівними сторонами (рівносторонній, рівнобедрений прямокутний трикутник тощо) або дано фігуру, в якій можна виділити зазначений трикутник.

Метод паралельного перенесення дозволяє зблизити віддалені один від одного частини фігури і цим спростити задачу.

Метод подібності дозволяє розглядати не задану в умові задачі фігуру, а їй подібну. Найчастіше цей метод використовується у задачах на побудову. Умова задачі дає змогу побудувати фігуру подібну шуканій або дає можливість «помножити» певним способом побудовану фігуру і, якщо потрібно, помістити її у потрібне положення [18].

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВИТКУ ВМІНЬ ШКОЛЯРІВ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1. Застосування геометричних перетворень до розв'язування задач на обчислення

2.1.1. Метод осової та центральної симетрії в задачах на обчислення

Задача 1. Записати рівняння прямої, симетричної прямій $y = 2x - 3$ відносно початку координат.

Розв'язання. Використавши формулу симетрії з центром у початку координат, дістанемо рівняння прямої, симетричної даній відносно початку координат: $y = 2x + 3$.

Відповідь. $y = 2x + 3$.

Задача 2. Дане коло має рівняння $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Записати рівняння кола, симетричного відносно початку координат даному колу. *Розв'язання.* Центри кіл, симетричних відносно початку координат, також симетричні, а радіуси однакові. Центром даного кола є точка $C(-4; 1)$, тому її образом у симетрії з центром у початку координат буде точка $C'(4; -1)$. Рівняння цього кола має вигляд $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Відповідь. $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

Задача 3. Визначити площу земельної ділянки, яка має форму трапеції ABCD, якщо її бічна сторона AB перпендикулярна до основи AD і має довжину 10 м, а середина другої бічної сторони CD — точка E — знаходиться від вершини A на відстані 18 м.

Розв'язання. Нехай трапеція ABCD є зображенням даної земельної ділянки: $AB = 10$ м, $AB \perp AD$, E — середина DC, тобто $CE = ED$, $AE = 18$ м (рис. 2.1).

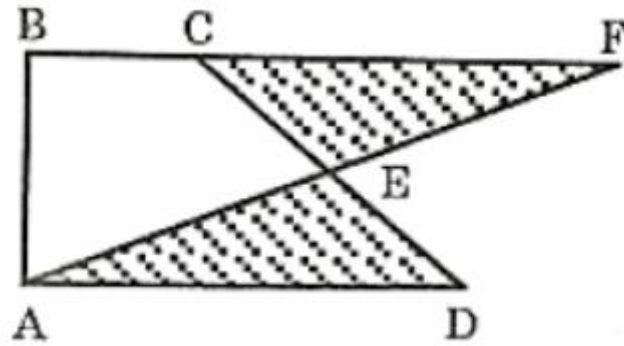


Рис. 2.1. Розв'язання

З'єднаємо точку А з серединою сторони CD точкою Е. Прийнемо точку Е за центр симетрії, тоді $C=Z_E(D)$. Побудуємо точку $F=Z_E(A)$, тоді за властивостями центральної симетрії $CF \parallel AD$ і $CF = AD$. Оскільки трикутники AED і FEC симетричні відносно точки Е, то $\triangle AED = \triangle FEC$. Отже, площа трапеції ABCD дорівнює площі прямокутного $\triangle ABF$, у якого $AB = 10$ м і $AF = 36$ м.

За теоремою Піфагора:

$$\sqrt{AF^2 - AB^2} = \sqrt{36^2 - 10^2} = \sqrt{1196} \approx 35.$$

$$S_{DABF} = 12 \cdot 10 \cdot 35 = 175.$$

Відповідь. 175 м^2 .

4. Діагоналі паралелограма ABCD лежать на прямих $y = 0$ та $y = x$. Середина однієї із сторін – точка $M(3;1)$. Знайти координати вершин паралелограма.

Розв'язання. У прямокутній системі координат пряма $y = 0$ – це вісь абсцис, а пряма $y = x$ – бісектриса першого і третього координатних кутів. Вони перетинаються у початку координат. Отже, центром симетрії шуканого паралелограма є початок координат (рис. 2.2)

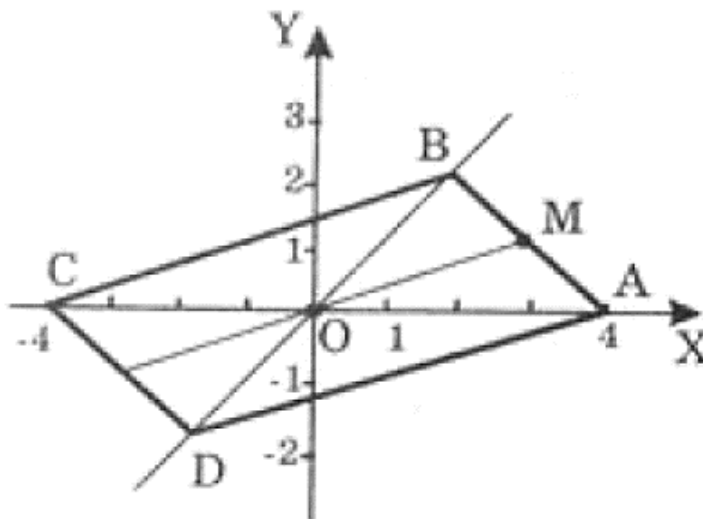


Рис. 2.2. Розв'язання

Дві протилежні вершини паралелограма лежать на осі абсцис, а дві інші – на прямій $y = x$. Нехай на осі абсцис лежить точка $A(x; 0)$, а на бісектрисі $y = x$ – точка $B(x_1; y_1)$, де $x_1 = y_1$.

Координати середини відрізка через координати кінців відрізка визначаються рівностями $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. За умовою задачі маємо

$$\frac{x + x_1}{2} = 3, \quad \frac{0 + x_1}{2} = 1.$$

З останніх двох рівнянь одержимо $x_1 = 2$, $x = 4$.

Отже, $A(4; 0)$, $B(2; 2)$. За властивостями симетрії з центром у початку координат $C(-4; 0)$, $D(-2; -2)$.

Відповідь. $A(4; 0)$, $B(2; 2)$, $C(-4; 0)$, $D(-2; -2)$.

Задача 5. Осями симетрії ромба є осі координат. Серединою однієї сторони ромба є точка $(2; 3)$. Знайти координати вершин ромба.

Оскільки осі координат є осями симетрії ромба, а осі симетрії містять діагоналі ромба, то його вершини лежать на осях координат.

Нехай $ABCD$ – ромб, його вершини A, C лежать на осі абсцис, а вершини B, D на осі ординат (рис. 2.3).

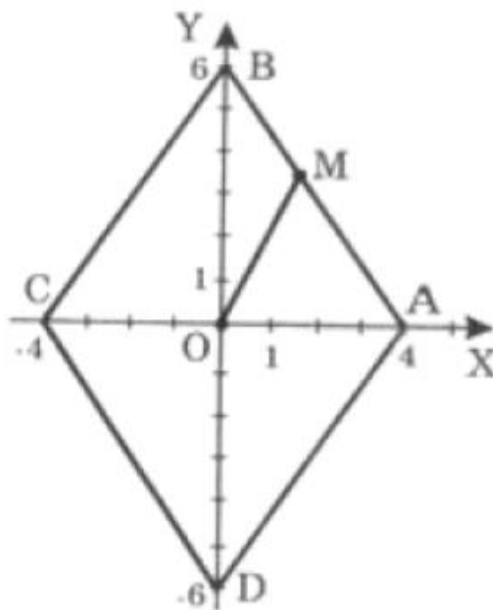


Рис. 2.3. Розв'язання

Вершини ромба матимуть координати $A(x;0)$, $B(0;y)$, $C(-x;0)$, $D(0;-y)$. Розглянемо прямокутний трикутник АВО, точка $M(2;3)$ є серединою гіпотенузи АВ. За властивістю медіани прямокутного трикутника, яка виходить з вершини прямого кута,

$$OM = MA = MB = \frac{1}{2} AB$$

Відстань точки М від початку координат:

$$OM = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

Оскільки $AM=OM$, то

$$AM^2 = (x - 2)^2 + 9 = 13.$$

Звідки $x=4$. Визначена точка $A(4;0)$, відповідно $C(-4;0)$.

Оскільки $BM=OM$, то

$$BM^2 = 4 + (y - 3)^2 = 13.$$

Звідки $y=6$. Визначена точка $B(0;6)$, відповідно $D(0;-6)$.

Відповідь. $A(4;0)$, $B(0;6)$, $C(-4;0)$, $D(0;-6)$.

Методом осьової симетрії також можна знайти координати вершин прямокутника, який задано в задачі наступного змісту.

Діагоналі прямокутника лежать на прямих $y = 3x$ та $y = -3x$. Одна із сторін

проходить через точку (2;6) (див. рис. 2.4).

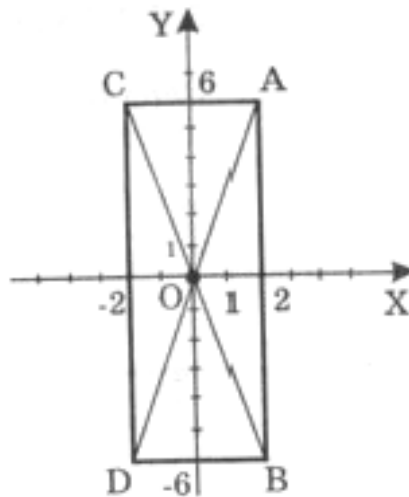


Рис. 2.4. Знаходження координат вершин прямокутника

Задача 6. На відрізку АЕ взято точки В, С, D так, що $AB=DE=2$, $BC=CD=1$. З точки М, яка не лежить на прямій АЕ, відрізки АВ, ВС, CD, ED видно під рівними кутами. Знайти кут АМЕ.

Розв'язання. Нехай на відрізку АЕ взято точки В,С,D такі, що $AB=DE=2$, $BC=CD=1$ (рис. 2.5). Проведемо через точку С пряму CN, перпендикулярну відрізку АЕ. Тоді точки В і D, А і Е попарно симетричні відносно прямої $CN=l$. Тому точка М повинна лежати на прямій CN.

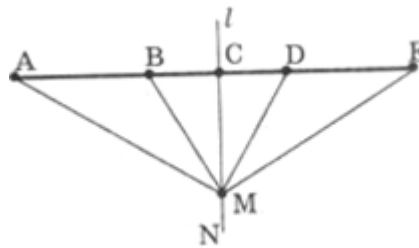


Рис. 2.5. Знаходження кута АМЕ

За умовою задачі $\angle AMB = \angle MBC = \angle DME$

Звідси випливає, що прямі MB і MD є бісектрисами кутів $\angle AMC$ і $\angle EMC$ прямокутних трикутників $\triangle AMC$ і $\triangle EMC$. За властивістю бісектриси MB кута $\angle AMC$ трикутника AMC

$$\frac{MC}{AM} = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$$

Отже, катет MC вдвічі менший гіпотенузи AM, тому $\angle MAB = 30^\circ$, $\angle EMC =$

60° . Отже, $\angle AME = \angle AMC + \angle EMC = 120^\circ$.

Відповідь. 120° .

2.1.2. Метод повороту в задачах на обчислення

Задача 1. Знайти координати точок, які є образами точок $A(3;0)$, $B(0;-2)$, $C(-3;-4)$, $D(-1;4)$ при повороті навколо початку координат на кут 90° (проти руху годинникової стрілки).

Розв'язання. Знайдемо координати точок без використання аналітичного задання повороту.

У прямокутній системі координат $\angle XOY = 90^\circ$. Тому при повороті навколо початку координат на кут 90° вісь абсцис переходить у вісь ординат, і навпаки вісь ординат – у вісь абсцис протилежного напрямку до осі OX .

При цьому абсциси точок переходять у ординати їх образів, а ординати – в абсциси з урахуванням знаків у відповідній четверті.

Точка $A(3;0)$ лежить на додатній пів осі абсцис, тоді її образ A' в даному повороті перейде на додатну піввісь ординат, і при цьому $OA = OA' = 3$. Отже, $A'(0;3)$ (рис. 2.6).

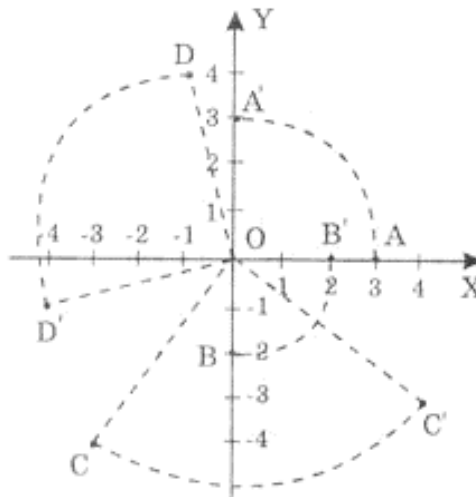


Рис. 2.6. Знаходження координат точок

$$B' = R_{90^\circ}^O(B), \quad C' = R_{90^\circ}^O(C), \quad D' = R_{90^\circ}^O(D).$$

Тоді, використовуючи попередні міркування, $B'(2;0)$, $C'(4;-3)$, $D'(-4;-1)$.

Відповідь. $A'(0;3)$, $B'(2;0)$, $C'(4;-3)$, $D'(-4;-1)$.

Задача 2. Знайти координати точки перетину прямої $3x+2y-5=0$ і образа

прямої $y=x-3$ при повороті навколо початку координат на кут 90° .

Розв'язання. Враховуючи, що при даному повороті $x'=-y$, $y'=x$, образом прямої $y=x-3$ буде пряма $y=-x+3$.

Координати точки перетину знайдемо, розв'язавши систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} y = -x + 3, \\ 3x + 2y - 5 = 0. \end{cases}$$

Відповідь. $(-1;4)$.

Задача 3. На гіпотенузі прямокутного трикутника зовні побудовано квадрат. Знайти відстань від вершини прямого кута трикутника до центра квадрата, якщо сума довжин катетів трикутника дорівнює a .

Розв'язання. Нехай O – центр квадрата $ABMN$ (див. рис. 2.7).

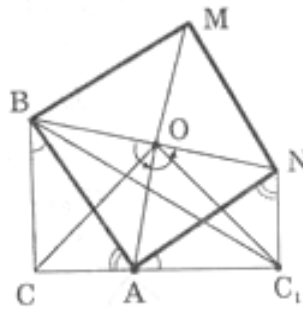


Рис. 2.7. Квадрат $ABMN$

Поворот навколо точки O на 90° відображає точку B на точку A , а точку A – на точку N . Якщо цим же поворотом точка C відображається на точку C_1 , то точки C , A , C_1 лежать на одній прямій, бо $\angle CAB + \angle BAN + \angle ANC_1 = 180^\circ$.

$\triangle ABC = \triangle ANC_1$, і тому $AC_1 = BC$, $CC_1 = CA + BC = a$.

$\triangle COC_1$ – прямокутний рівнобедрений, звідси $2CO^2 = a^2$ і

$$CO = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2.1.3. Метод паралельного перенесення в задачах на обчислення

Задача 1. По один бік від залізничної колії розміщені села A і B (рис. 2.8). Де потрібно побудувати залізничну платформу довжиною $MN=a$, щоб загальна довжина дороги AM і BN була найменшою?

Розв'язання. Оскільки довжина платформи є величиною сталою, то її можна виключити із загальної довжини шляху $AM+MN+BN$. Для розв'язання задачі достатньо виконати паралельне перенесення $T_{\vec{a}}$ (довжина вектора \vec{a} дорівнює a) точки A , тоді $A' = T_{\vec{a}}(A)$, $N' = T_{\vec{a}}(M)$. Тепер задача полягає у знаходженні на залізничній колії l такого пункту N , щоб шлях A_1N+NB був найменший. Такий пункт, як відомо, можна знайти, користуючись методом симетрії відносно прямої l : шукана точка $N = l \times BA'_1$, $A'_1 = S_l(A_1)$.

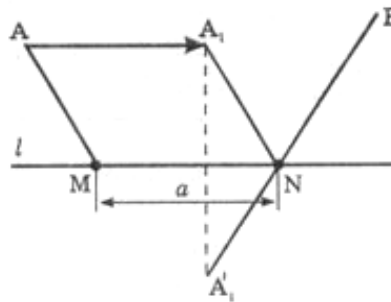


Рис. 2.8. Метод паралельного перенесення в прикладній задачі

Відклавши від точки N відрізок $NM=a$ у напрямі A_1A , дістанемо точку M . Цим самим знайдемо положення платформи MN .

Задача 2. Яким паралельним перенесенням можна відобразити точку $A(4;-3)$ на точку $A'(1;2)$?

Розв'язання. Використавши формули паралельного перенесення:

$$\begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

отримаємо, $x_0 = 1 - 4 = -3$, $y_0 = 2 + 3 = 5$.

Шуканим є паралельне перенесення $\vec{a}(-3; 5)$. Координатні формули матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 5. \end{cases}$$

Задача 3. Сума довжин основ трапеції дорівнює 21 см, а довжини діагоналей дорівнюють 13 см і 20 см. Обчислити площу трапеції.

Розв'язання.

Нехай у трапеції $ABCD$: $AD+BC=21$ см, $AC=13$ см, $BD=20$ см (див. рис. 2.9).

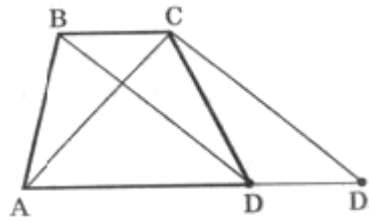


Рис. 2.9. Трапеція ABCD

Виконаємо паралельне перенесення діагоналі BD на вектор \overrightarrow{BC} . Тоді точка B перейде в точку C, а точка D – у D₁. Тоді CD₁=BD=20, DD₁=BC, тому AD₁=21см. Отже, у $\triangle ACD_1$ відомі усі сторони, його площу можна обчислити за формулою Герона.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = 126,$$

$$\text{де } p = \frac{P}{2} = \frac{21+13+20}{2} = 27.$$

Площа трапеції ABCD дорівнює площі $\triangle ACD_1$ ($S_{ABCD} = S_{ACD_1}$).

Відповідь: 126 см².

Задача 4. У рівнобічній трапеції довжина більшої основи дорівнює 20 см, довжина бічної сторони дорівнює 8 см, а величина одного із кутів 60°. Обчислити довжину меншої основи.

Розв'язання. Використовуючи паралельне перенесення сторони AB на вектор \overrightarrow{BC} (рис. 2.10), отримаємо рівносторонній $\triangle A_1CD$, де A₁D=8 см.

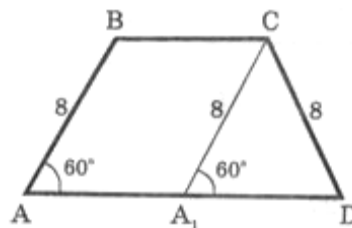


Рис. 2.10. Рівнобічна трапеція

$$BC=AA_1=AD-A_1D=20-8=12 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 8 см

Задача 5. Два кола радіусів R і 3R дотикаються зовні. Знайти площу фігури, обмеженої дугами цих кіл і їх спільною зовнішньою дотичною.

Розв'язання.

Покладемо $R=1$, тоді маємо коло $K(0;3)$ і коло $K_1(0;1)$, до них проведена зовнішня дотична AB , де A і B – точки дотику (див. рис. 2.11).

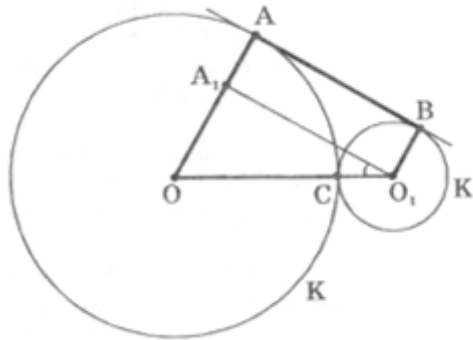


Рис. 2.11. Дотичні кола

Площу фігури ABC , обмеженої дугами AC і BC кіл та дотичною AB , знайдемо як різницю площі трапеції ABO_1O і площ секторів AOC , BO_1C кіл. Щоб знайти висоту трапеції, виконаємо паралельне перенесення дотичної AB на вектор $\overrightarrow{BO_1}$, дістанемо відрізок $O_1A_1 \perp OA$.

ΔA_1O_1O – прямокутний, у ньому катет $OA_1=2$, гіпотенуза $OO_1=4$ (при $R=1$), тому $A_1O_1 = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Тоді площа трапеції ABO_1O буде

$$S_1 = \frac{3+1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Оскільки в прямокутному трикутнику A_1O_1O катет A_1O удвічі менший за гіпотенузу O_1O , то $\angle A_1OO_1=60^\circ$, а $\angle OO_1A_1=30^\circ$. Тоді площа сектора AOC дорівнює $\frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$, а площа сектора BO_1C дорівнює $\frac{\pi}{3}$ (бо $\angle BO_1C=120^\circ$).

Площа шуканої фігури дорівнює

$$S = 4\sqrt{3} - \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}.$$

Відповідь: $4\sqrt{3} - \frac{11\pi}{6}$

2.1.4. Метод подібності та гомотетії в задачах на обчислення

Задача 1. Через середину E висоти BD рівнобедреного трикутника ABC ($AB=BC$) паралельно бічній стороні AB проведена пряма, яка перетинає сторони AC і BC трикутника ABC відповідно в точках M і K . Обчислити

периметр трикутника МКС, якщо периметр трикутника АВС дорівнює 40 см.

Розв'язання. На рисунку 2.12 зображено трикутник АВС, в якого $AB=BC$, $BD \perp AC$, $BE=ED$, $MK \parallel AB$, точка Е належить МК. Оскільки $ME \parallel AB$ і $BE=ED$, то відрізок МЕ –середня лінія $\triangle ABD$, тому $AM=MD$. Звідси маємо, що $MC = \frac{3}{4}AC$.

$\triangle CMK$ є образом $\triangle ABC$ в гомотетії з центром С і коефіцієнтом $k = \frac{3}{4}$: $\triangle CMK = H_C^{\frac{3}{4}}(\triangle ABC)$.

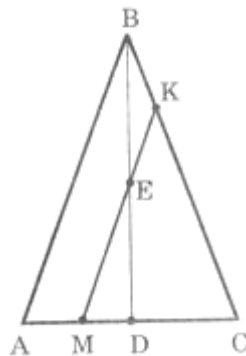


Рис. 2.12. Трикутник АВС

За властивостями гомотетії периметр $\triangle MKC$, дорівнює $\frac{3}{4}$ периметра $\triangle ABC$, тобто 30 см.

Відповідь: 30 см.

Задача 2. У гострий кут, рівний 60° , вписано два кола, які зовні дотикаються одне до одного. Радіус меншого кола r . Знайти радіус більшого кола.

Розв'язання. За умовою задачі $\angle BMD = 60^\circ$, $O_1A = O_1C = r$ (див. рис. 2.13).

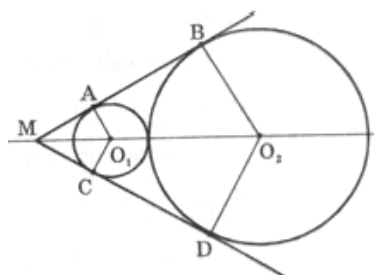


Рис. 2.13. Кола, вписані в кут

Нехай $O_2B = O_2D = R$ – шуканий радіус. Тоді, оскільки центри вписаних кіл O_1 і O_2 вписаних у даний кут кіл лежать на бісектрисі кута, то $\angle AMO_1 = 30^\circ$.

Тоді у прямокутному $\triangle AO_1M$ гіпотенуза $MO_1 = 2r$, а гіпотенуза

прямокутного $\triangle BMO_2$ $MO_2=2R$.

Трикутники MO_1A і MO_2B – гомотетичні з центром гомотетії M , тому

$$\frac{AO_1}{BO_2} = \frac{MO_1}{MO_2},$$

або

$$\frac{r}{R} = \frac{2r}{3r+R}.$$

Звідки:

$$3r^2 + Rr = 2Rr,$$

$$3r^2 = Rr,$$

$$R = 3r.$$

Відповідь: $3r$.

Задача 3. Для обчислення висоти дерева (чи іншого предмета) на деякій відстані від нього становлять віху, вищу за зріст людини, що вимірює, відходять від неї по прямій з деревом до тих пір, поки вершина дерева, верхушка віхи і око спостерігача будуть на одній прямій. Знайти висоту дерева, якщо зріст людини 1,7 м, висота віхи – 2 м, а відстань від дерева до віхи 50 м, від віхи до людини – 1,5 м.

Розв'язання. Розглянемо рисунок 2.14.

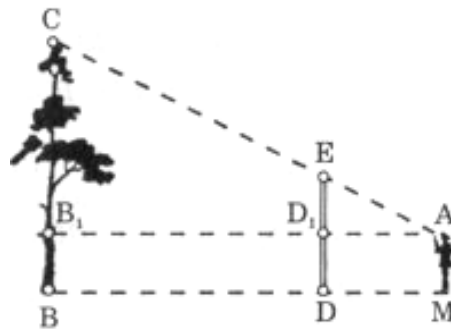


Рис. 2.14. Обчислення висоти дерева

$AM=1,7$ м, $DE=2$ м, $BD=50$ м, $DM=1,5$ м, $DD_1=1,7$ м, $D_1E=0,3$ м.

З подібності трикутників AD_1E і AB_1C маємо $\frac{AD_1}{D_1E} = \frac{AB_1}{B_1C}$. Звідки

$$B_1C = \frac{AB_1 \cdot D_1E}{AD_1}.$$

$$AB_1 = AD_1 + D_1B_1 = MD + DB = 1,5 + 50 = 51,1 \text{ (м)},$$

$$AD_1 = MD = 1,5 \text{ (м)},$$

$$D_1E = 0,3 \text{ (м)}.$$

Тоді, $B_1C = \frac{51,5 \cdot 0,3}{1,5} = 10,3 \text{ (м)}.$

Висота дерева $BC = BB_1 + B_1C = AM + B_1C = 1,7 + 10,3 = 12 \text{ (м)}.$

Відповідь: 12 м.

Задача 4. У прямокутний трикутник з катетами a і b вписано квадрат, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр квадрата.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $AC = b$, $BC = a$, $CMLN$ – вписаний квадрат (див. рис. 2.15).

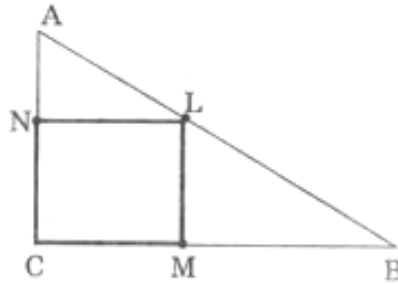


Рис. 2.15. Вписаний квадрат CMLN

Оскільки $\triangle ANL \sim \triangle ACB$, то $\frac{NL}{BC} = \frac{AN}{AC}$. Або $\frac{NL}{a} = \frac{b-NL}{b}$, $NL = \frac{ab}{a+b}$.

Периметр квадрата $P_{CNML} = 4NL = \frac{4ab}{a+b}$.

Відповідь: $\frac{4ab}{a+b}$

За допомогою методу гомотетії також можна розв'язати цікаву прикладну задачу наступного змісту.

Задача 5. Шлагбаум має плечі довжиною 4 м і 1 м. На скільки піднявся кінець довгого плеча шлагбаума, якщо його короткий кінець опустився на 60 см? (Початковим вважати горизонтальне положення шлагбаума).

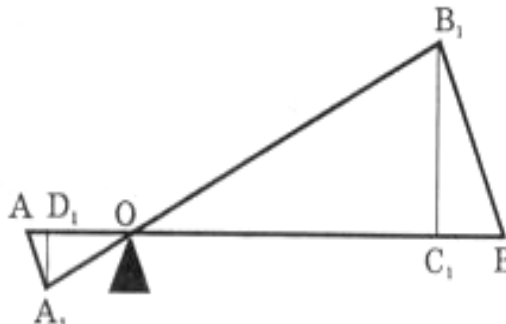


Рис. 2.16. Шлагбаум

Вказівка. З подібності трикутників OAA_1 і OBV_1 знайдемо висоту $\triangle OVB_1$:
 $B_1C_1 = 4 \cdot 0,6 = 2,4$ (м).

Відповідь: 2,4 м.

2.2. Застосування методу геометричних перетворень до розв'язування задач на доведення

2.2.1. Метод осової та центральної симетрії в задачах на доведення

Задача 1. Довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться у відношенні 2:1.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці O (див. рис. 2.17).

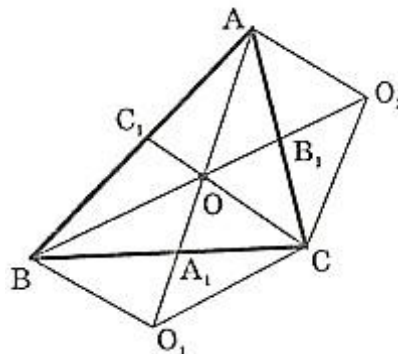


Рис. 2.17. Трикутник ABC з проведеними медіанами

Проведемо пряму CO і розглянемо центральну симетрію з центром A_1 . У ній образом трикутника BO_1C , який разом із своїм прообразом утворюють паралелограм CO_1BO . Аналогічно знайшовши образ трикутника COA у центральній симетрії з центром B_1 дістанемо паралелограм AOO_2 .

Звідси маємо, $CO_1 \parallel OB$ і $CO_1 \parallel O_2O$, $O_2C \parallel OA$ і $O_2C \parallel OO_1$. Тому чотирикутник CO_2OO_1 – паралелограм і $CO_1 = OO_2$. Врахувавши, що $CO_1 = OB$, дістанемо $OO_2 = OB$. Крім того, $CO \parallel AO_2$. Отже пряма CO перетинає сторону AB у такій точці C_1 , що OC_1 є середньою лінією $\triangle ABO_2$, тому $AC_1 = C_1B$ і відрізок CC_1 є третьою медіаною $\triangle ABC$, яка теж проходить через точку O перетину двох перших. Враховуючи, що $OB_1 = B_1O_2$ і $OB = OO_2$, маємо $BO:OB_1 = 2:1$. Аналогічно доводиться, що й інші медіани точкою перетину діляться у відношенні 2:1, починаючи від вершини. *Доведено.*

Задача 2. Два рівних кола дотикаються одне до одного у точці M .

Довести, що на кожній прямій, яка проходить через точку M , ці кола відтинають рівні між собою хорди.

Доведення. Два даних кола симетричні відносно точки їх дотику M (див. рис. 2.18)

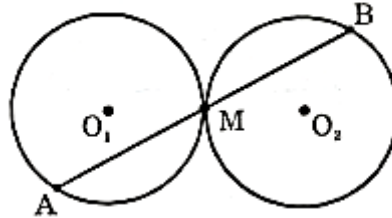


Рис. 2.18. Два рівних кола що дотикаються у точці M

Це випливає з того, що ці кола рівні між собою і їх центри симетричні відносно точки M . Точки A і B , які лежать на одній прямій з центром симетрії M і належать симетричним колам, також симетричні відносно точки M . Отже, $AM = BM$. Ці міркування справедливі для кожної прямої, яка проходить через точку M і перетинає дані кола. *Доведено.*

Задача 3. Дві прямі, які проходять через точку перетину діагоналей паралелограма, перетинають його сторони відповідно в точках M і L , N і K . Довести, що чотирикутник $MLNK$ — паралелограм.

Доведення. Оскільки точка O перетину діагоналей паралелограма є центром його симетрії, то точки M і L , N і K — взаємно симетричні відносно точки O , тобто чотирикутник $MNLK$ має центр симетрії O і його діагоналі точкою O поділяються навпіл, тому чотирикутник $MNLK$ — паралелограм (див. рис. 2.19).

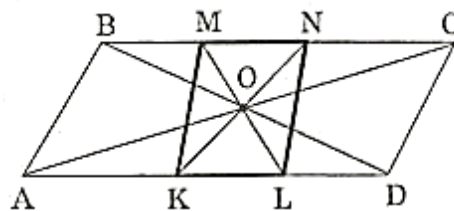


Рис. 2.19. Чотирикутник $MLNK$

Задача 4. Довести, що медіана трикутника менша пів суми сторін, що виходять з нею з однієї вершини, і більша різниці між цією пів сумою і

половиною сторони, до якої медіана проведена.

Доведення. Нехай BM — медіана трикутника ABC (рис. 2.20).

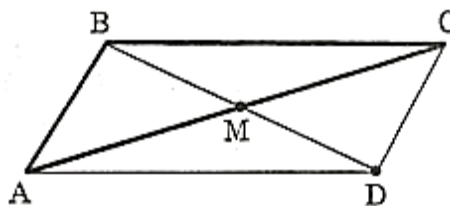


Рис. 2.20. Трикутник ABC з медіаною BM

Побудуємо точку D , симетричну точці B відносно точки M . Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. З $\triangle BCD$ випливає, що $2BM < BC + CD$, звідси $BM < (BC + CD)/2$ або $BM < (BC + AB)/2$.

З трикутників AMB і BMC маємо $BM + AC/2 > AB$ і $BM + AC/2 > BC$.

Додавши почленно дві останні нерівності і поділивши на 2, дістанемо

$$BM > \frac{AB + BC}{2} - \frac{AC}{2}.$$

Що й потрібно було довести.

Задача 5. Довести, що два трикутники рівні, якщо сторона, прилеглий до неї кут і різниця двох інших сторін одного трикутника дорівнюють відповідним елементам другого.

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — задані трикутники: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1$ (див. рис. 2.21). Задамо осьові симетрії бісектрисами l_1 , l_2 відповідно кутів B і B_1 . Побудуємо $C' = S_{l_1}(C)$, $C_1' = S_{l_2}(C_1)$.

Тоді $\triangle ACC' = \triangle A_1C_1C_1'$ ($AC = A_1C_1$, $AC' = A_1C_1'$), а це означає що існує переміщення p , яке відображає $\triangle ACC'$ у $\triangle A_1C_1C_1'$: $A_1 = p(A)$, $C_1 = p(C)$, $C_1' = p(C')$.

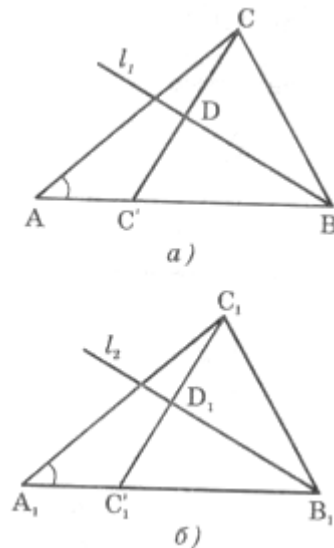


Рис. 2.21. Задані трикутники: а) $\triangle ABC$; б) $\triangle A_1B_1C_1$

При такому переміщенні $D_1 = p(D)$, точки D і D_1 – середини відповідно відрізків CC_1 і $C_1C'_1$, $l_2 = p(l_1)$ і $A_1C'_1 = p(AC')$.

Оскільки точка A_1B є перетином прямих AC' і l_1 , а точка B_1 є перетином образів прямих A_1C' і l_2 цих прямих, то $B_1 = p(B)$.

Отже, $\triangle A_1B_1C_1 = p(\triangle ABC)$, а це означає, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. *Доведено.*

Задача 6. Довільне коло перетинає одне з двох концентричних кіл у точках A і B , а друге – у точках C і D . Довести, що хорди AB і CD паралельні, $AC = BD$, $AD = BC$.

Доведення. Нехай $K(O, R)$, $K_1(O_1, R_1)$, $K_2(O_1, R_2)$ – дані кола, O і O_1 – їх центри, A і B – точки перетину кіл K і K_1 , C і D – точки перетину кіл K і K_2 (див. рис. 2.22).

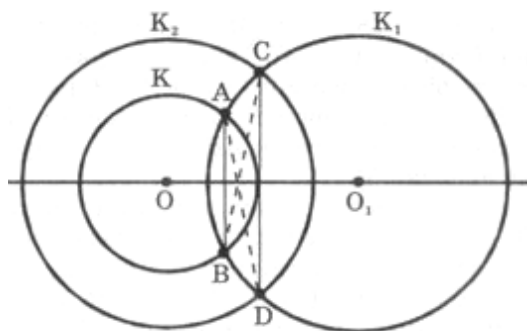


Рис. 2.22. Заданий перетин кіл

Тоді пряма OO_1 є віссю симетрії даних кіл. У цій симетрії

$$B = S_{OO_1}(A), \quad D = S_{OO_1}(C).$$

Звідси $AB \perp OO_1$, $CD \perp OO_1$, отже $AB \parallel CD$.

$$BD = S_{OO_1}(AC) \Rightarrow BD = AC, \quad BC = S_{OO_1}(AD) \Rightarrow BC = AD.$$

Чотирикутник ABCD – рівнобедрена трапеція. *Доведено.*

2.2.2. Метод повороту в задачах на доведення

Задача 1. Точка В лежить між точками А і С. У півплощині з межею АС побудовані рівносторонні трикутники АВМ і ВНС. Точки К і D – середини відрізків АН і МС. Довести, що $\triangle VKD$ рівносторонній.

Доведення. На рисунку 2.23 маємо рівносторонні трикутники АВМ і ВНС, К – середина відрізка АН і D – середини відрізка МС.

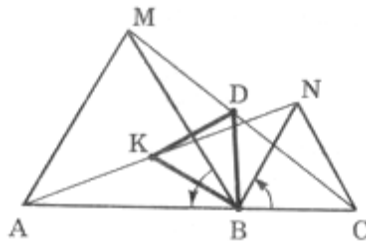


Рис. 2.23. Рівносторонні трикутники АВМ і ВНС

Поворотом навколо точки В на кут 60° точки М і С відображаються відповідно на точки А і N, тому відрізок МС цим же поворотом відображається на відрізок АN.

Оскільки поворот зберігає відношення відрізків, то $R_B^{60^\circ}(D) = K$. Звідси маємо, $BK=BD$ і $\angle KBD = 60^\circ$. Тобто, $\triangle VKD$ – рівносторонній.

Задача 2. Чотирикутник ABCD – ромб, у якого $\angle BDA = 60^\circ$. На сторонах АВ і ВС ромба взято точки М і N такі, що $AM=BN$. Довести, що $\triangle MDN$ рівносторонній.

Доведення. $\angle ADB = \angle BDC = 60^\circ$, $AB=BC$, тому поворотом навколо точки D на 60° точка С відобразиться на точку В, точка В – на точку А, відрізок СВ – на відрізок ВА (рис. 2.24).

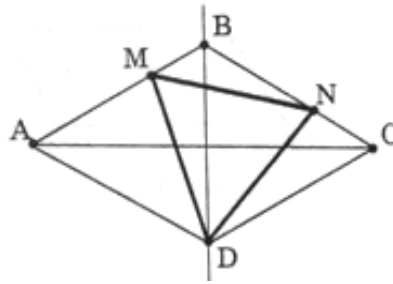


Рис. 2.24. Чотирикутник ABCD

З $AB=BC$ і $AM=BN$ випливає, $BM=CN$; тому при повороті навколо точки D на 60° точка N перейде в точку M , а звідси $DN=DM$. $\triangle MDN$ – рівнобедрений і при вершині D має кут 60° , тому $\angle DMN = \angle DNM = 60^\circ$ і $\triangle MDN$ – рівносторонній. *Доведено.*

Задача 3. Зовні квадрата на його сторонах побудовані рівносторонні трикутники. Довести, що чотирикутник із вершинами в центрах побудованих трикутників, є квадратом.

Доведення. Центри O_1, O_2, O_3, O_4 побудованих рівносторонніх трикутників лежать на осях симетрії даного квадрата $ABCD$, які проходять через середини протилежних сторін квадрата, бо ці центри лежать на медіанах (і висотах) побудованих трикутників (див. рис. 2.25)

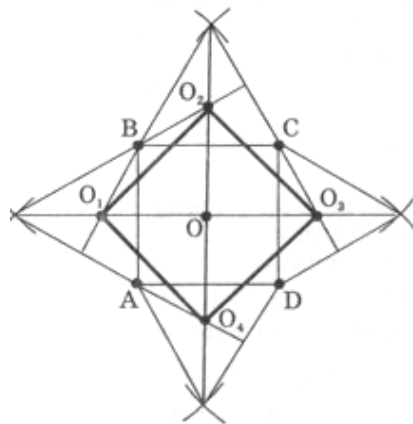


Рис. 2.25. Квадрат ABCD

Отже, діагоналі одержаного чотирикутника взаємно перпендикулярні. Крім того, діагоналі чотирикутника рівні, у точці O діляться пополам. Тому поворотом навколо центра O квадрата $ABCD$ на 90° чотирикутник відображається на себе.

Отже, $O_1O_2O_3O_4$ – квадрат. *Доведено.*

Задача 4. На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC зовні його побудовано квадрат з центром O . Довести, що промінь CO є бісектрисою кута ACB .

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ – прямокутний трикутник, $\angle C = 90^\circ$ і на стороні AB побудовано квадрат $ABMN$ з центром O .

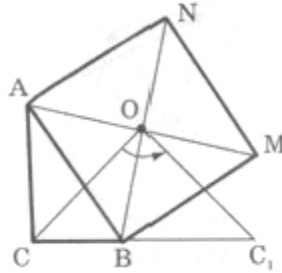


Рис. 2.26. Прямокутний трикутник ABC

Поворотом навколо точки O на 90° точка A відображається на точку B ($OA=OB$, $\angle AOB = 90^\circ$), точка C – на точку C_1 , відрізок AC – на відрізок BC_1 . Точка B належатиме відрізку CC_1 . Оскільки $OC=OC_1$ і $\angle COC_1 = 90^\circ$, то $\triangle COC_1$ – прямокутний рівнобедрений. Отже, $\angle OCB = 45^\circ$ і CO – бісектриса кута ACB .

2.2.3. Метод паралельного перенесення в задачах на доведення

Задача 1. Якщо дві медіани трикутника рівні між собою, то трикутник рівнобедрений. Довести.

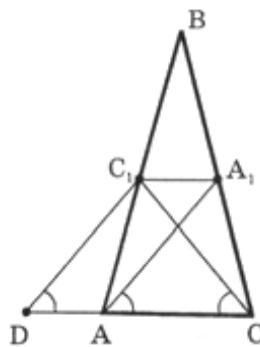


Рис. 2.27. Трикутник ABC з медіанами $AA_1=CC_1$

Доведення. Нехай у $\triangle ABC$ медіани $AA_1=CC_1$. Потрібно довести, що $\angle BAC = \angle BCA$.

Побудуємо відрізок DC_1 – образ відрізка AA_1 у паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. За властивостями паралельного перенесення $AA_1 \parallel DC_1$, тому

$$\angle A_1AC = \angle C_1DA. (1)$$

Крім того, $\triangle DC_1C$ – рівнобедрений ($DC_1 = C_1C$), тому

$$\angle C_1DA = \angle C_1CD. (2)$$

З рівностей (1) і (2) маємо $\angle A_1AC = \angle C_1CA$.

Тоді $\triangle SAC_1 = \triangle ACA_1$ ($CC_1 = AA_1$, AC – спільна, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$).

Із рівностей цих трикутників випливає рівність кутів C_1AC і A_1CA , тобто $\angle BAC = \angle BCA$. Трикутник ABC рівнобедрений. *Доведено.*

Задача 2. Довести, що різниця основ трапеції завжди менша суми, але більша різниці бічних її сторін.

Доведення. Дана трапеція $ABCD$, $BC \parallel AD$, $AD > BC$ (див. рис. 2.28).

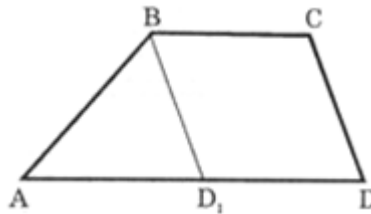


Рис. 2.28. Трапеція $ABCD$

Виконаємо паралельне перенесення бічної сторони CD на вектор \overrightarrow{CB} : точка C перейде в точку B , точка D – в точку D_1 . Одержали $\triangle ABD_1$, двома сторонами якого є бічні сторонами трапеції, а третьою – різниця основ $AD - BC = AD_1$. За властивістю сторін трикутника $AD_1 < AB + BD_1$, тобто $AD_1 < AB + DC$. Звідси також випливає, що $AD_1 > AB - DC$. *Доведено.*

2.2.4. Метод подібності та гомотетії в задачах на доведення

Задача 1. Довести, що висоти будь-якого трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай ABC – даний трикутник, AA_1 , BB_1 , CC_1 – його медіани, M – точка їх перетину, AA_2 , BB_2 , CC_2 – висоти (див. рис. 2.29).

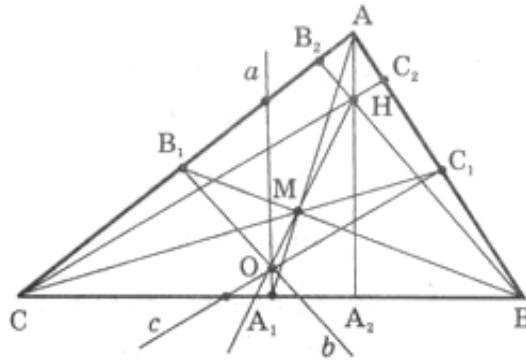


Рис. 2.29. Трикутник ABC

Розглянемо гомотетію з центром у точці M і коефіцієнтом $k = -0,5$. У цій гомотетії пряма, що містить висоту AA_2 , відобразиться в пряму a , що проходить через точку A_1 паралельну висоті AA_2 , тобто пряма a перпендикулярна до сторони BC в її середині.

Аналогічними міркуваннями можна показати, що прямі, які містять висоти BB_2 і CC_2 переходять у цій гомотетії відповідно у прямі b, c , перпендикулярні до відрізків AC і AB у їх серединах. Оскільки прямі a, b і c , перетинаються в одній точці O , то прообрази цих прямих, тобто висоти AA_2, BB_2, CC_2 перетинаються в одній точці H . *Доведено.*

Задача 2. Довести, що пряма, яка з'єднує точку O перетину діагоналей трапеції $ABCD$ з точкою перетину її бічних сторін, проходить через середини основ трапеції.

Доведення. Маємо трапецію $ABCD$, S – точка перетину бічних сторін, O – точка перетину її діагоналей. Потрібно довести, що пряма SO перетинає основи трапеції в точках M і N , таких, що $AM=MD, BN=NC$.

Задамо гомотетію центром S і парою відповідних точок A і B (див. рис. 30).

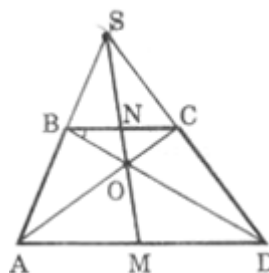


Рис. 2.30. Трапеція ABCD

Тоді точка D перейде в точку C і відрізок AD – у відрізок BC , а тому і середини основ M і N також гомотетичні. Отже, точки M і N лежать на одній прямій з точкою S .

Друга гомотетія, що задається центром O і парю відповідних точок A і C , відображає точку D на B , відрізок AD на відрізок CB , відрізок AC – на відрізок DB , тому точки M , N і O лежать на одній прямій. Оскільки й точка S лежить на прямій MN , то пряма, що з'єднує точку O перетину діагоналей трапеції з точкою S перетину її бічних сторін, проходить через середини M , N основ трапеції. *Доведено.*

2.3. Геометричні перетворення в задачах на побудову

2.3.1. Застосування методу осової та центральної симетрії

Задача 1. Через дану точку M , що лежить усередині даного кута, провести пряму так, щоб її відрізок, обмежений сторонами кута, ділився в точці M навпіл.

Розв'язання. Дана точка M лежить усередині даного кута AOB . Візьмемо на стороні OA кута довільну точку C і побудуємо симетричну їй відносно точки M точку C_1 (див. рис. 2.31). Пряма, що проходить через точку C_1 паралельно стороні OA даного кута, перетне сторону OB у точці N – одному кінці шуканого відрізка.

MN – шукана, вона перетинає сторону OA в точці L , такий, що $MN=ML$. Правильність побудови випливає з того, що центрально-симетричні прямі паралельні.

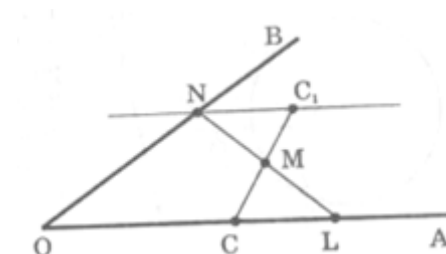


Рис. 2.31. Даний кут AOB

Задача 2. Побудувати трикутник за трьома його медіанами m_a , m_b , m_c .

Розв'язання. Аналіз. Нехай ABC – шуканий трикутник з медіанами $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$, де m_a , m_b , m_c – задані відрізки, M – точка перетину

медіан (див. рис. 2.32).

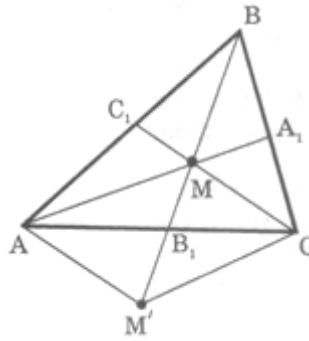


Рис. 2.32. Побудова трикутника за трьома його медіанами

Побудуємо точку M' , симетрично точки B_1 , і розглянемо чотирикутник $AMCM'$. У нього $MB_1 = B_1M'$ і $AB_1 = B_1C$, а тому він паралелограм. Врахувавши, що медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні $2 : 1$, починаючи від вершини, маємо

$$MM' = \frac{2}{3} m_b, MC = AM' = \frac{2}{3} m_c, CM' = AM = \frac{2}{3} m_a.$$

Це означає, що побудова шуканого трикутника зводиться до побудови допоміжної фігури – одного з трикутників SMM' або AMM' .

Побудова. Будуємо:

1. Трикутник SMM' за трьома відомими сторонами $\frac{2}{3} m_a, \frac{2}{3} m_b, \frac{2}{3} m_c$; маємо вершину S шуканого трикутника.
2. Точку B_1 – середину сторони MM' .
3. Точку $A = Z_{B_1}(C)$.
4. Точку $B = Z_M(M')$. ABC – шуканий трикутник.

Доведення. Правильність побудови впливає з проведеного аналізу: $AA_1 = m_a, BB_1 = m_b, CC_1 = m_c$.

Дослідження. Задача має єдиний розв'язок, якщо дані відрізки m_a, m_b, m_c задовольняють таку подвійну нерівність

$$|m_b - m_c| < m_a < m_b + m_c$$

Задача 3. Дана пряма t , не належна їй точка M і коло K в одній півплощині з межею t . Знайти на даній прямій таку точку A , щоб сума відстані MA і довжини відрізка дотичної з точки A до кола, була найменшою.

Розв'язання. Аналіз. Нехай шуканою є точка A на прямій m : $MA + AC = \min$ (див. рис. 2.33)

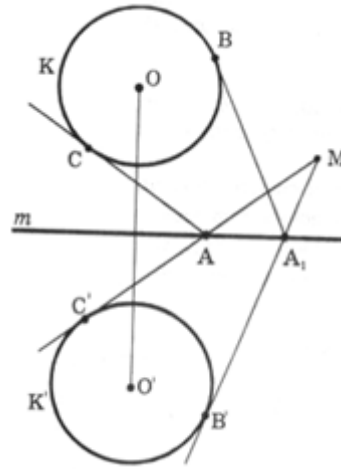


Рис. 2.33.

Сума двох відрізків ламаної найменша, коли ці відрізки є продовженням один одного на одній прямій. Побудуємо коло $K'(O', R)$, симетричне колу $K(O; R)$ відносно прямої m . Точка дотику C у симетрії відносно прямої m перейде в точку C' кола $K'(O', R)$, при цьому $AC = AC'$. Тоді $AM + AC = AM + AC' = \min$.

Отже, точка A є точкою перетину прямої m з дотичною MC' , проведеною з точки M до кола $K'(O', R)$.

Побудова. Будуємо:

1. Коло $K'(O', R)$, симетричне колу $K(O; R)$ відносно прямої m .
2. Дотичну з точки M до кола K' , C' – точка дотику; точка A перетину дотичної MC' з прямою m – шукана.

Доведення. Правильність побудови обґрунтована в аналізі.

Дослідження. Оскільки з точки M , яка не належить колу $K(O; R)$, а отже, і колу $K'(O', R)$, можна провести дві дотичні, то на прямій m існує дві точки A і A_1 , які задовольняють умові задачі

Задача 4. Дано кут AOB і точки M і K усередині даного кута. Потрібно сполучити ці точки ламаною лінією найменшої довжини так, щоб дві її вершини лежали на сторонах кута AOB .

Розв'язання. Побудуємо точку K_1 , симетричну точці K відносно прямої OA , і точку M_1 , симетричну точці M відносно прямої OB . Точки N і L перетину

прямої K_1M_1 зі сторонами кута – шукані (див. рис. 2.34).

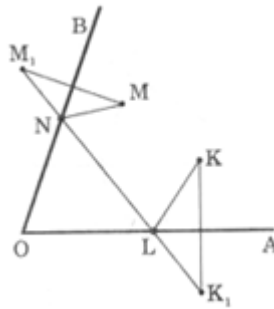


Рис. 2.34. Кут AOB і точки M і K усередині даного кута

Справді, сума $KL + LN + NM = K_1L + LN + NM_1$ – найменша, оскільки останні три відрізки утворюють прямолінійний відрізок.

2.3.2. Застосування методу повороту

Задача 1. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих (по одній на кожній).

Розв'язання. Аналіз. Припустимо, що $\triangle ABC$ задовольняє умову задачі (див. рис. 2.35).

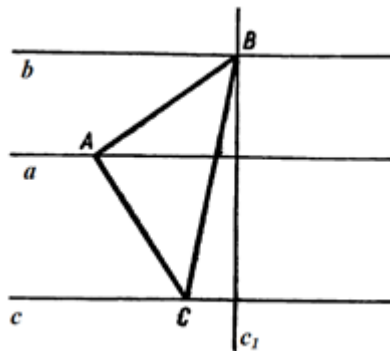


Рис. 2.35. Побудова трикутника

Прийmemo точку A за центр повороту на кут 90° (проти напрямку руху стрілки годинника). Виконаємо поворот навколо точки A . Тоді образом точки C буде точка B . Знайдемо образ прямої c при тому самому повороті. Ним буде пряма c_1 . Оскільки точка C лежить на прямій c , то точка B лежить на прямій c_1 . Крім того, точка B лежить на прямій b (за умовою), тому вона є точкою перетину прямих b та c_1 . Побудувавши точку B , будують точку C при тому самому повороті (але в напрямі за годинниковою стрілкою).

Побудова. Взявши довільну точку A на прямій a за центр повороту, здійснимо поворот прямої c на кут 90° (проти напрямку руху стрілки

годинника). Для цього досить побудувати відрізок, що є відстанню точки А до прямої c і виконати зазначений поворот. Отримаємо точку В. Здійснивши поворот відрізка АВ на кут 90° (в напрямі руху стрілки годинника), матимемо точку С – третю вершину трикутника.

Доведення. За побудовою $\angle BAC = 90^\circ$, бо $c_1 \perp b$ і точки А, В, С належать відповідно прямим a, b, c .

Дослідження. Розв'язок задачі існує завжди, оскільки положення точки В при повороті точки С на 90° навколо точки А визначається однозначно. З точністю до рівності фігур на площині та розташування трикутника задача має один розв'язок.

Задача 2. Побудувати рівносторонній трикутник такий, що його одна вершина знаходиться в даній точці С, а дві інші – по одній на даному колі і на даній прямій.

Розв'язання. Аналіз. Нехай рівносторонній трикутник АВС побудовано так, що однією вершиною є дана точка С, вершина А лежить на даній прямій a , а вершина В – даному колу $K(O; R)$ (див. рис. 2.36).

Оскільки $AC = BC$ і $\angle ACB = 60^\circ$, то поворот навколо точки С на кут 60° відображає точку А на точку В, пряму a – на пряму a' , причому точка В належить прямій a' . Але точка В належить і колу $K(O; R)$. Тому точку В знайдемо як точку перетину кола $K(O; R)$ із прямою. Тоді точка А є образом точки В при повороті навколо точки С на кут -60° .

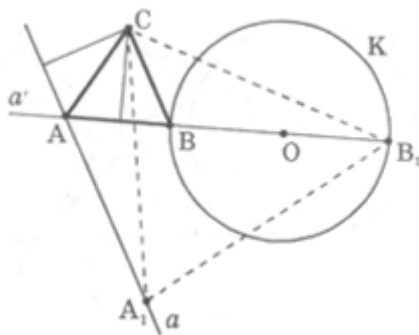


Рис. 2.36. Побудова рівностороннього трикутника

Побудова. Дані точка С, пряма a і коло $K(O; R)$ (рис. 2.36). Будуємо:

1. Пряму $a' = R_C^{60^\circ}(a)$.

Точка В – це точка перетину прямої a' із колом $K(O; R)$.

2. Точку $A = R_C^{-60^\circ}(B)$.

Трикутник ABC – шуканий.

Доведення. $CA = CB$, $\angle ACB = 60^\circ$ за побудовою. Отже, $\triangle ABC$ – рівносторонній.

Дослідження. Кількість розв'язків задачі визначається кількістю точок перетину даного кола $K(O; R)$ із прямою $a' = R_C^{60^\circ}(a)$.

Таким чином, їх може бути два (як на рис. $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$), один або жодного.

Задача 3. Земельна ділянка форми квадрата була огорожена. Із забору залишилося два стовпці на паралельних сторонах квадрата і стовп у центрі квадрата. Відновити межі ділянки.

Розв'язання. Аналіз. Припустимо, що межі ділянки (квадрат ABCD) відновлені, точка (стовпець) М лежить на стороні АВ, точка N (стовпець) – на стороні CD (див. рис. 2.37).

Нехай точки М і N не лежать на одній прямій з центром О квадрата. Побудуємо точки M_1 і N_1 , симетричні точкам М і N відносно точки О: $M_1 = Z_O(M)$, $N_1 = Z_O(N)$. Далі виконуємо поворот точок М і N, M_1 і N_1 , навколо точки О на 90° . Точки М, N, M_1 , N_1 , M' , N' визначають прямі, на яких лежать сторони квадрата.

Побудова. Дано точки М, N і О, які не лежать на одній прямій (див. рис. 2.37). Порядок побудови визначений в аналізі:

1. Будуємо $M_1 = Z_O(M)$, $N_1 = Z_O(N)$.

2. Точки

$$M' = R_O^{90^\circ}(M), \quad M'_1 = R_O^{90^\circ}(M_1), \quad N' = R_O^{90^\circ}(N), \quad N'_1 = R_O^{90^\circ}(N_1).$$

3. Прямі MN_1 , NM_1 , $M'N'_1$, $N'M'_1$.

Точки: точку А перетину прямих MN_1 і $M'N'$, точку В перетину MN_1 і $N'M'_1$, точку С перетину прямих $N'M'_1$ і NM_1 , точку D перетину прямих NM_1 і $M'N'_1$.

Чотирикутник $ABCD$ – шуканий квадрат.

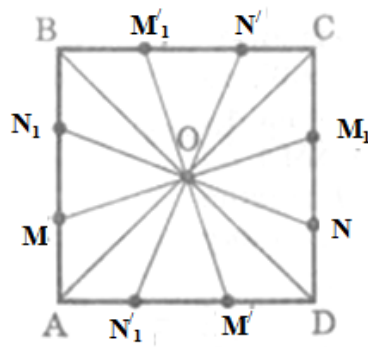


Рис. 2.37. Відновлення межі ділянки

Доведення. Правильність побудови впливає з аналізу та властивостей центральної симетрії та повороту навколо точки.

Дослідження. Якщо точки M і N не симетричні відносно точки O , то задача має єдиний розв'язок. Якщо ж точки M, N, O лежать на одній прямій, то задача має безліч розв'язків.

2.3.2. Застосування методу паралельного перенесення

Задача 1. Населенні пункти A і B розділені двома каналами, кожний з яких має паралельні береги. Потрібно визначити місце для мостів через ці канали такі, щоб пункти A і B були сполучені найкоротшим шляхом.

Розв'язання. Аналіз. Положення пунктів A і B та каналів a, b, a_1, b_1 з берегами зображені на рисунку 2.38.

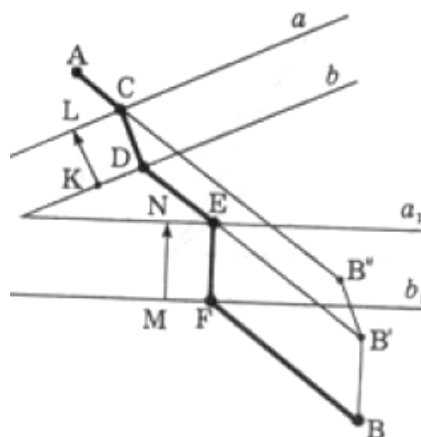


Рис. 2.38. Населенні пункти A і B розділені двома каналами

Визначити місця мостів можна наступними способами.

1-й спосіб. Побудуємо точку B' – образ точки B у паралельному

перенесенні на відстань, яка дорівнює ширині каналу (a_1, b_1) у напрямі від берега b_1 до берега a_1 (на вектор \overrightarrow{MN}). Потім побудувати точку B'' – образ точки B' у паралельному перенесенні на відстань, яка дорівнює ширині каналу (a, b) у напрямі від берега b до берега a (на вектор \overrightarrow{KL}). Пряма $B''A$ перетне пряму a в шуканій точці C . $CD \perp b$ – положення моста на каналі (a, b).

Відрізок DB' перетне берег a_1 в точці E , такий, що $EF \perp b_1$ – положення моста на каналі (a_1, b_1).

Ламана $ACDEFB$ – шуканий найкоротший шлях між пунктами A і B . Справді, цей шлях складається із відрізків сталої довжини CD і EF та суми відрізків $AC + DE + FB = AC + CB''$. Оскільки останні два відрізки утворюють прямолінійний відрізок AB'' , то їх сума найменша

2-й спосіб. Побудуємо точку A' – образ точки A в паралельному перенесенні на відстань між берегами a, b в напрямі між берегами від a до b (вектор \overrightarrow{LK}) і точку B' – образ точки B в паралельному перенесенні на відстань між берегами a_1, b_1 в напрямі між берегами від b_1 до a_1 (на вектор \overrightarrow{MN}).

Відрізок $A'B'$ перетне береги b і a_1 відповідно в точках D і E таких, що $DC \perp a, EF \perp b_1$ – шукані місця мостів (див. рис. 2.39)

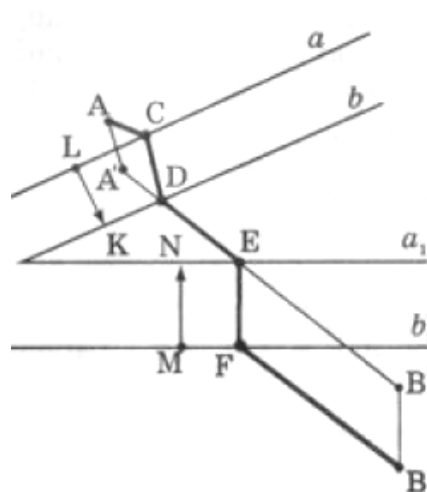


Рис. 2.39. Ламана $ACDEFB$

Ламана $ACDEFB$ – шуканий найкоротший шлях між пунктами A і B .

Правильність побудови впливає з того, що відрізки CD і EF у складі ламаної – мають сталу величину. За побудовою $AC = A'D$, $FB = EB'$, тому сума

$AC + DE + FB = A'D + DE + EB' = A'B'$, ланки якої утворюють прямолінійний відрізок, має найкоротшу довжину.

Задача 2. Побудувати трикутник за даними його двома медіанами і кутом між ними.

Розв'язання. Аналіз. Нехай побудований трикутник ABC , в якого медіани $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $\angle AOB = \alpha$ (див. рис. 2.40).

Виконаємо паралельне перенесення медіани BB_1 на вектор $\overrightarrow{B_1A_1}$, дістанемо відрізок DA_1

Утворився трикутник AA_1D , який можна побудувати за двома сторонами AA_1 і DA_1 та кутом α між ними, а від нього легко перейти до шуканого трикутника, враховуючи властивості точки перетину медіан трикутника.

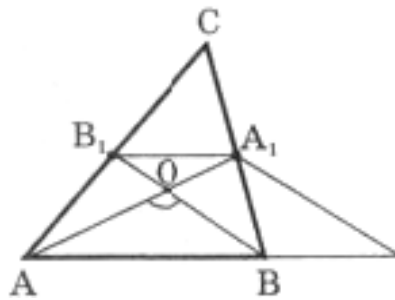


Рис. 2.40. Побудова трикутника за його двома медіанами і кутом між ними

Побудова

1. Будуємо трикутник AA_1D за сторонами $AA_1 = m_a$, $DA_1 = m_b$ і $\angle AA_1D = \alpha$.
2. Ділимо відрізок m_a на три рівні частини і відкладаємо на AA_1 відрізок $AO = \frac{2}{3}m_a$.
3. Через точку O проводимо пряму, паралельну прямій DA_1 , вона перетинає сторону AD в точці B .
4. На прямій BO відкладаємо відрізок $OB_1 = \frac{1}{3}m_b$.
5. Прямі AB_1 і BA_1 у перетині дають точку C . $\triangle ABC$ – шуканий.

Доведення. Оскільки $OB \parallel A_1D$, то $\angle AOB = \angle AA_1D = \alpha$.

$AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$ – за побудовою. Отже, $\triangle ABC$ задовольняє умові

задачі.

Дослідження. Розв'язання задачі звелось до побудови трикутника за двома сторонами і кутом між ними, а така побудова завжди можлива і однозначна.

Задача 3. Побудувати трапецію за даними її основами та діагоналями.

Розв'язання. Аналіз. Нехай $ABCD$ – шукана трапеція, в ній $AD = a$, $BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ – дані відрізки (див. рис. 2.41).

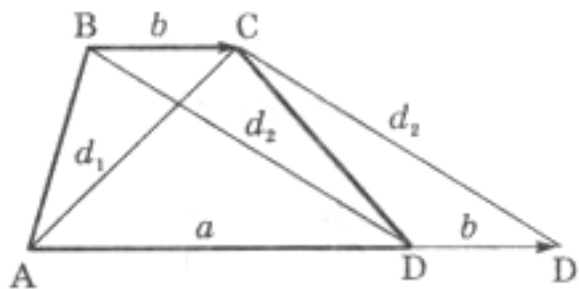


Рис. 2. 41. Побудова трапеції за основами та діагоналями

Задамо паралельне перенесення вектором \overrightarrow{BC} і побудуємо образ діагоналі BD в цьому перенесенні – дістанемо відрізок $CD_1 = BD = d_2$. Одержали трикутник ACD_1 , у якого відомі усі сторони: $AD_1 = a + b$, $AC = d_1$, $CD_1 = d_2$. Отже, трикутник ACD_1 можна побудувати, при цьому матимемо дві вершини A і C шуканої трапеції. Дві інші вершини B і D дістанемо, виконавши паралельне перенесення сторони CD_1 на вектор \overrightarrow{CB} , довжина якого b і напрям, паралельний прямій AD від D_1 до A відомі.

Побудова.

1. Побудуємо трикутник ACD_1 за трьома відомими сторонами.
2. Через точку C проведемо пряму, паралельну AD_1 , і на ній відкладемо відрізок $CB = b$ у напрямі від D_1 до A .
3. Через точку B проводимо пряму, паралельну CD_1 , вона перетне сторону AD_1 в точці D – четвертій вершині шуканої трапеції.
4. $ABCD$ –шукана трапеція.

Доведення. $BD = CD_1 = d_2$ – за властивістю паралельного перенесення. $BC=b$, $AC = d_1$, $AD = AD_1 - DD_1 = AD_1 - b = a$, $BC \parallel AD$ – за побудовою. Отже,

ABCD –шукана трапеція.

Дослідження. Оскільки розв'язання задачі звелось до побудови трикутника ACD_1 за відрізками трьома відомими сторонами $a + b$, d_1 , d_2 , то задача має єдиний розв'язок, якщо $|d_1 - d_2| < a + b$ або $d_1 + d_2 > a + b$. Задача розв'язку не має, якщо $d_1 + d_2 \leq a + b$ або $|d_1 - d_2| \geq a + b$.

2.3.4. Застосування методу подібності та гомотетії

Задача 1. Побудувати трикутник за трьома його висотами h_a , h_b , h_c .

Розв'язання. Аналіз. Нехай трикутник ABC побудовано такий, що його висоти $AH_1 = h_a$, $BH_2 = h_b$, $CH_3 = h_c$, де h_a , h_b , h_c – дані відрізки (див. рис. 2.42 а). Запишемо залежність між сторонами, висотою і площею трикутника ABC: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$, $S = \frac{1}{2}ch_c$.

Звідси $ah_a = bh_b = ch_c$. Розділимо останню рівність на $h_a h_b$, дістанемо $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{c}}$.

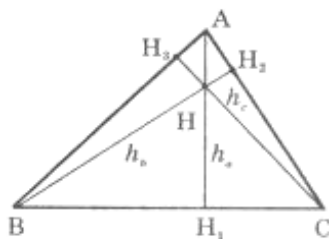
Позначимо $m = \frac{h_a h_b}{c}$, тоді $\frac{m}{h_a} = \frac{h_b}{h_c}$, h_a , h_b , h_c – дані відрізки, тому відрізок m можна побудувати як четвертий пропорційний відрізків h_a , h_b , h_c .

Рівність $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{m}$ свідчить про те, що шуканий $\triangle ABC$ подібний $\triangle A_1 B_1 C_1$, у якого відомі сторони h_a , h_b , m .

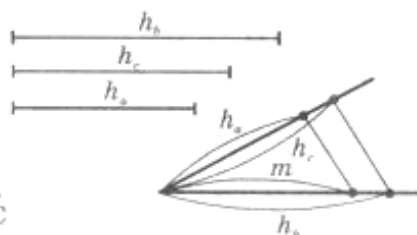
Отже, $\triangle A_1 B_1 C_1$ можна побудувати, а потім методом подібності побудувати і $\triangle ABC$.

Побудова. Будуємо:

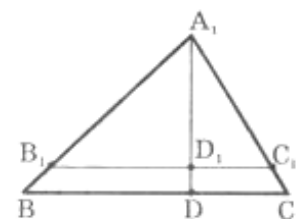
1. Відрізок $m = \frac{h_a h_b}{c}$



a)



b)



в)

Рис. 2.42. Побудова трикутника за трьома його висотами

2. $A_1B_1C_1$ за сторонами $A_1C_1 = h_a$, $B_1C_1 = h_b$, $A_1B_1 = m$.
3. Висоту $A_1D_1 = h_{a1}$ трикутника $A_1B_1C_1$ (рис. 2.42. в).
4. Трикутник A_1BC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ у гомотетії з центром A_1 і коефіцієнтом $k = h_{a1} : h_a$. Для цього на прямій A_1D_1 , що містить висоту h_{a1} від точки A_1 відкладемо висоту h_a і через її кінець – точку D – проведемо пряму, паралельну прямій B_1C_1 , яка перетне прямі A_1B_1 і A_1C_1 у шуканих вершинах B і C (рис. 2.42 в).

Трикутник A_1BC – шуканий.

Доведення. Правильність побудови обґрунтовано в аналізі. Крім того, використано твердження, що в подібних трикутниках висоти пропорційні відповідним сторонам, тобто $h_a : h_{a1} = a : a_1$.

Дослідження. Задача має єдиний розв'язок, якщо відрізки h_a , h_b , m задовольняють нерівність сторін трикутника.

Задача 2. Побудувати прямокутний трикутник, у якого один катет у два рази більший другого, а гіпотенуза дорівнює даному відрізку m .

Розв'язання. Аналіз. Нехай прямокутний трикутник ABC побудовано ($\angle C = 90^\circ$) побудовано такий, що $AC = 2 BC$ і гіпотенуза $AB = m$, де m – даний відрізок (див. рис. 2.43). Візьмемо на катеті AC довільну точку A_1 і проведемо через неї пряму, паралельну гіпотенузі AB до перетину з катетом CB в точці B_1 . Отримаємо трикутник A_1CB_1 , подібний трикутнику ABC , у нього один катет $A_1C = 2CB_1$. Прямокутний трикутник A_1CB_1 , у якого один катет у два рази більший за другого, легко побудувати, їх нескінченна множина. Побудувавши один із них – $\triangle A_1CB_1$, перейдемо до шуканого трикутника ACB за допомогою гомотетії з центром у точці C і коефіцієнтом $k = AB : A_1B_1$.

Побудова. Будуємо:

1. Прямокутний $\triangle A_1CB_1$, у якого $\angle C = 90^\circ$, $A_1C = 2CB_1$. Позначимо $A_1B_1 = m_1$.
2. Трикутник ABC гомотетичний трикутнику A_1CB_1 у гомотетії з

центром у точці C і коефіцієнтом $k = m : m_1$. Для цього досить побудувати відрізок CA як четвертий пропорційний до відрізків A_1C , $m_1 = A_1B_1$ і m .

Пряма, проведена через точку A паралельно прямій A_1B_1 , перетне промінь CB_1 у третій вершині B шуканого $\triangle ABC$.

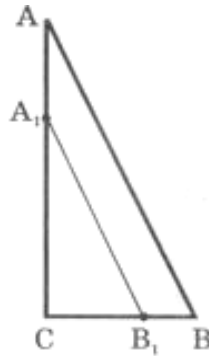


Рис. 2.43. Побудова прямокутного трикутника

Доведення. Правильність побудови обґрунтована в аналізі.

Дослідження. Задача завжди має єдиний розв'язок, оскільки її розв'язання зводиться до побудови трикутника, гомотетичного побудованому в гомотетії, що однозначно визначається.

Задача 3. Побудувати трикутник за даними його двома кутами і периметром.

Розв'язання. Аналіз. Нехай дано кути α і β при основі AB і периметр $2p$ $\triangle ABC$. Відкинувши умову, що дано периметр, за двома кутами α і β можна побудувати безліч трикутників, подібних шуканому трикутнику. Нехай один із них – $\triangle AB_1C_1$ (рис. 2.44). У подібних трикутниках відношення периметрів дорівнює коефіцієнту подібності. Використаємо гомотетію з центром у точці A і коефіцієнтом $k = 2p_1 : 2p$, де p_1 – півпериметр $\triangle ABC$.

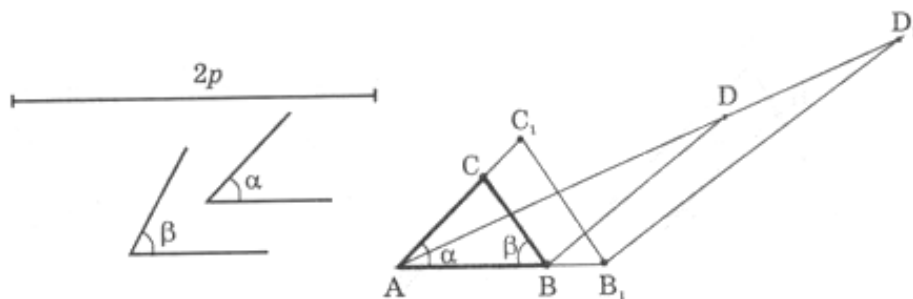


Рис. 2.44. Побудова трикутника за двома кутами і периметром.

Побудова. Будуємо:

1. Трикутник ΔAB_1C_1 за даними кутами $\alpha = \angle B$ і $\beta = \angle C$.
2. Довільний промінь з центром в точці A і на ньому відкладаємо відрізки $AD = 2p$, $AD_1 = 2p$.
3. Пряму B_1D_1 і через точку D проводимо пряму, паралельну прямій B_1D_1 , яка перетне пряму AB_1 в точці B .
4. Через точку C пряму, паралельну прямій B_1C_1 , яка перетне пряму AC_1 в точці C .

Трикутник ABC – шуканий.

Доведення.

Оскільки $BD \parallel B_1D_1$ і $BC \parallel B_1C_1$, то

$$\frac{AD_1}{AD} = \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = k \text{ і } \Delta AB_1C_1 = H_A^k(\Delta ABC).$$

$$\angle CAB = \angle C_1AB_1 = \alpha, \angle CBA = \angle C_1B_1A = \beta \text{ і } AB + AC + BC = AD = 2p.$$

Дослідження. Задача завжди має єдиний розв'язок, оскільки в даній гомотетії існує єдиний трикутник, гомотетичний побудованому ΔAB_1C_1 .

Висновки до розділу

Кожне геометричне перетворення має свої властивості, а тому застосування кожного геометричного перетворення має свої особливості.

У другому розділі на прикладах розв'язування задач детально розкрито суть кожного із методів геометричних перетворень: методу центральної та осової симетрії, методу повороту, методу паралельного перенесення та методу гомотетії на практиці їх застосування та реалізації до розв'язування планіметричних задач.

Розглянуті задачі, і типові їм, доцільно детально вивчати на факультативах та гуртковій роботі, адже вони сприяють розвитку логічного мислення, уяви та пам'яті, дають цікавий матеріал для дослідницької роботи.

..

ВИСНОВКИ

Питання теорії та практики методу геометричних перетворень, а також методики розв'язування планіметричних задач за допомогою цього методу є актуальними напрямками математичних досліджень. Це обумовлено розширенням спектра завдань, які ставить сучасна освіта та суспільство. Володіння математичними знаннями, навичками математичної діяльності та здатністю застосовувати ці знання для вирішення різноманітних практичних та навчальних задач є важливою складовою самореалізації особистості в сучасному світі.

Використання методу геометричних перетворень для розв'язання планіметричних задач є ефективним способом розвитку творчих здібностей учнів. У процесі написання дипломної роботи було досліджено особливості цього методу та розроблено методику його застосування для вирішення планіметричних задач.

У першому розділі роботи розглядаються загальні аспекти методики розв'язування планіметричних задач, визначається поняття геометричних перетворень площини, а також аналізується їх роль та значення у шкільному курсі планіметрії. Окрім того, було досліджено основні принципи методу геометричних перетворень.

Основна ідея методу геометричних перетворень полягає в тому, що для розв'язання задачі потрібно використовувати перетворення геометричних фігур. За допомогою перетворення створюються нові фігури, властивості яких дозволяють значно спростити вирішення задачі. Після того як задача вирішена для перетвореної фігури, результат переноситься назад на початкову фігуру за допомогою оберненого перетворення.

Однак кожен тип геометричного перетворення має свої специфічні особливості. У другому розділі дипломної роботи детально описано застосування методів центральної та осьової симетрії, повороту, паралельного перенесення та гомотетії. Розглянуто їх використання на практиці для розв'язування планіметричних задач на обчислення, доведення та побудову.

Навчання учнів застосуванню методу геометричних перетворень при розв'язуванні планіметричних задач є складним процесом, оскільки відсутні чітко визначені алгоритми для кожного конкретного випадку. Кожне розв'язання вимагає творчого підходу.

Метод геометричних перетворень буде ефективним тільки тоді, коли учні зможуть: правильно будувати геометричні фігури під час виконання певних перетворень; визначати тип перетворення за допомогою елементів фігур; встановлювати положення відповідних точок в результаті виконання перетворень.

Застосування цього методу сприяє глибшому розумінню геометрії та допомагає учням краще засвоювати матеріал.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: Книжка для вчителя / М.І. Антоненко . – К.: – Рад.шк., 1991.
2. Апостолова Г.В. Геометрія: 9: дворівневий підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / Г.В.Апостолова. – К. : Генеза, 2009.
3. Бевз Г.П. Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвітн. навч. закладів / Г.П.Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017.
4. Боравльов А.П. Аналіз у розв'язуванні задач на побудову: Посібник для студентів математичних спеціальностей / А.П. Боравльов, І.Г.Ленчук. – К.: Вища школа, 2002. – 192 с.
5. Брославська Г.М. Навчання учнів проводити дослідження в задачах на побудову / Г.М. Брославська // Математика в школах України. – 2005. –
6. №30 (114). – С. 33-37.
7. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітн. навч. закладів / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: Зодіак – ЕКО, 2009.
8. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 9 класу загальноосвітн. навч. закладів / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. – К.: УОВЦ «Оріон», 2017.
9. Бурда М. І. Геометрія: Навч. посіб. для 8-9 кл. шк. з поглибл. вивч. математики / М. І. Бурда, Л. М. Савченко. – К.: Освіта, 2004.
10. Висоцька А.М. Перетин прямої і кола / А.М. Висоцька // Математика в школах України. – 2011. – № 5 (53). – С. 15-16.
11. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. – Суми: ВТД “Університетська книга”, 2003. — 504 с.
12. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 1: Основні поняття та відомості про відображення фігур. Симетрія відносно точки.

- .симетрія відносно прямої. – Ніжин , 2001. – 208 с.
13. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 2: Поворот площини навколо точки. Паралельне перенесення. – Ніжин , 2002. – 241 с.
 14. Геометричні перетворення площини: навч.посібник / Н.В.Боровик, І.В.Зайченко, М.Мурач, В.П.Яковець. Частина 3: Подібність і гомотетія. Інверсія. – Ніжин , 2021. – 277 с.
 15. Дорофеев С. Н. Геометрические преобразования в примерах и задачах / Дорофеев С. Н. – Пенза: Информационно-издательский центр ПГУ, 2002. – 189 с.
 16. Єршова А.П. Геометрія 9 клас: підручник для загальноосвітн. навч. закладів / А.П. Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф. Крижановський. – Х.:Вид-во «Ранок», 2010.
 17. Заславский А. А. Геометрические преобразования / Заславский А. А. – М.: МЦНМО, 2004. – 86 с.
 18. Кравчук О.М. Геометричні перетворення. Частина І. Ортогональні перетворення: методичні рекомендації до вивчення вибіркової навчальної дисципліни «Геометричні перетворення» / Ольга Мусіївна Кравчук. – Луцьк, 2018. – 73с.
 19. Ленчук І. Метод перетворень: паралельне перенесення / І. Ленчук // Математика в рідній школі: науково-методичний журнал. 2016. № 3. С. 37-42.
 20. Матяш О. І. Вивчення рухів фігур в курсі геометрії школи ІІ ступеня : Дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Матяш Ольга Іванівна; УДПУ ім. М.П.Драгоманова. – Київ, 1995. – 187 с.
 21. Мерзляк А.Г. Геометрія для 9 класу: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: «Гімназія», 2010, 2017.
 22. Мерзляк А. Г. Геометрія: Підручник для 9 класу з поглибленим вивченням математики / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С.

- Х.: Гімназія, 2004. – 272 с.
23. Методичний пошук вчителя математики: зб. наук. праць за матеріалами І Всеукр. дистанц. наук.-практ. конф., 16 березня 2017 р. / Міністерство освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. – Вінниця, 2017 – 269 с.
 24. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / [М.І.Бурда, М.Ф.Городній, Д.А.Номіровський, А.В.Паньков, Н.А.Тарасенкова, М.В.Чемерис, В.О.Швець, М.С.Якір]. – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf>
 25. Навчальна програма для з математики 5-9 клас для загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] / [М.І. Бурда, Ю.І. Мальований, Є. П. Нелін, Д. А. Номіровський, А. В. Паньков, Н. А. Тарасенкова, М. В. Чемерис, М. С. Якір] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>
 26. Новий державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/derzhavni-standarti>
 27. Полонський В.Б. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії / В.Б. Полянський, Ю.М. Рабинович, М.С. Якір. – Тернопіль: Підручники й посібники, 2009.
 28. Погорєлов О.В. Геометрія: Планіметрія: Підручник для 7-9 кл. серед. шк. / О.В.Погорєлов. – К.: Освіта, 1994. – 238 с.
 29. Погорєлов О.В. Геометрія: Підручник для 7-9 кл. серед. шк. / О.В. Погорєлов. – К.: Освіта, 1994, 2001.
 30. Семець Сергій. Навчання учнів основної школи методам

геометричних перетворень [Електронний ресурс] / Сергій Семець. –

Режим доступу до ресурсу: <https://core.ac.uk/download/pdf/12083041.pdf>

31. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів / З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак ЕКО, 2006, 2010.
32. Шарапа Валентина. Конструктивні задачі в 8 класі / В.Шарапа // Математика в школах України. – 2009. - №1 (13). – С. 16-17.